

# 高頻度データに基づく確率微分方程式モデルの ハイブリッド推定

内田 雅之<sup>1,2,3</sup>

(受付 2016 年 6 月 28 日；改訂 10 月 14 日；採択 10 月 17 日)

## 要 旨

本論文では、高頻度データを用いた確率微分方程式モデルの未知パラメータにおけるハイブリッド推定について解説する。最適な収束率より遅いベイズ型推定量を初期推定量とした、マルチステップ推定法や適応的最尤型推定法を説明し、それらの推定量の漸近的性質について述べる。エルゴード的拡散過程、非エルゴード的拡散過程、微小拡散過程の 3 種類の拡散モデルを取り扱い、数値実験により提案した推定量の漸近的挙動を考察する。

キーワード：拡散過程，確率微分方程式，最尤型推定量，ハイブリッド推定量，ベイズ型推定量，マルチステップ推定量。

## 1. はじめに

情報技術の発展により、金融などの時系列データが高頻度に観測可能となり、連続時間確率過程モデルの統計解析の需要が増してきている。特に、確率微分方程式で定義された拡散型確率過程モデルの統計解析は今までに盛んに研究されている (Kutoyants, 1984, 1994, 2004; Prakasa Rao, 1988; Yoshida, 1992a, 1992c; Genon-Catalot and Jacod, 1993; Bibby and Sørensen, 1995; Kessler, 1997; Prakasa Rao, 1999; Iacus, 2008; Sørensen, 2012)。非線形で非定常な連続時間確率過程である拡散過程モデルは表現力豊かな統計モデルである反面、尤度関数を明示的に求めることができない難点があるが、マリアバン解析や疑似尤度解析を援用することにより、統計的漸近理論を展開することが可能である。高頻度データにおける統計的モデリングやモデル選択のための情報量規準についても精力的に研究されていて、実際にデータ解析を行う上での問題点が指摘されている。例えば、エルゴード的拡散過程モデルでは、ドリフトパラメータとボラティリティパラメータという 2 種類の未知パラメータを推測する必要があるが、疑似尤度関数が複雑で、パラメータ空間が高次元である場合、疑似尤度関数の最大化によって疑似最尤推定量 (または最尤型推定量) を計算することが困難となることが多々ある。最尤型推定量の導出に失敗して、誤った値を算出した場合、情報量規準に基づくモデル選択に影響が出ることも知られている。このことから、理論的に保障された推定量であっても、実際にデータ解析において正しい推定量を算出できるかは別の問題となる。本論文では、確率微分方程式モデルのパラメータを効率よく推定するための統計的手法の一つであるハイブリッド推定法について解説する。

<sup>1</sup> 大阪大学大学院 基礎工学研究科：〒 560-8531 大阪府豊中市待兼山町 1-3

<sup>2</sup> 大阪大学 数理・データ科学教育研究センター (MMDS)：〒 560-8531 大阪府豊中市待兼山町 1-3

<sup>3</sup> CREST

最初に, I.I.D. モデルにおけるハイブリッドマルチステップ(HMS)推定量について考察する.  $l_n(\theta)$  は  $\theta \in \mathbb{R}$  に関して滑らかな対数尤度関数とする.  $q \in (0, 1/2]$ ,  $J = \lceil -\log_2 q \rceil$  とすると,  $2^{J-1}q \leq 1/2 < 2^Jq$  となる. 初期推定量  $\hat{\theta}^{(0)}$  は,  $M > 0$  に対し,

$$(1.1) \quad \sup_n E_{\theta^*} [|n^q(\hat{\theta}^{(0)} - \theta^*)|^M] < \infty$$

を満たすとする. ここで,  $\theta^*$  はパラメータ  $\theta$  の真値で,  $E_{\theta^*}$  は真のモデル(分布)  $P_{\theta^*}$  の下での期待値を表す.  $k = 1, \dots, J$  に対し,  $k$ -ステップ推定量  $\hat{\theta}^{(k)}$  を

$$\hat{\theta}^{(k)} = \hat{\theta}^{(k-1)} - [\partial_{\theta}^2 l_n(\hat{\theta}^{(k-1)})]^{-1} [\partial_{\theta} l_n(\hat{\theta}^{(k-1)})]$$

と定義する. ただし,  $\partial_{\theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}$ ,  $\partial_{\theta}^2 = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$  で,  $\partial_{\theta}^2 l_n(\hat{\theta}^{(k-1)}) \neq 0$  とする.  $\theta$  は 1 次元パラメータであることに注意する. テイラーの定理より,

$$\begin{aligned} \partial_{\theta} l_n(\theta^*) &= \partial_{\theta} l_n(\hat{\theta}^{(k-1)}) + \partial_{\theta}^2 l_n(\hat{\theta}^{(k-1)})[\theta^* - \hat{\theta}^{(k-1)}] + R_n[(\theta^* - \hat{\theta}^{(k-1)})^2], \\ R_n &= \int_0^1 (1-t) \partial_{\theta}^3 l_n(\hat{\theta}^{(k-1)} + t(\theta^* - \hat{\theta}^{(k-1)})) dt \end{aligned}$$

だから,

$$\begin{aligned} \hat{\theta}^{(k)} &= \hat{\theta}^{(k-1)} - [\partial_{\theta}^2 l_n(\hat{\theta}^{(k-1)})]^{-1} [\partial_{\theta} l_n(\theta^*) - \partial_{\theta}^2 l_n(\hat{\theta}^{(k-1)})[\theta^* - \hat{\theta}^{(k-1)}] - R_n[(\theta^* - \hat{\theta}^{(k-1)})^2]] \\ &= \hat{\theta}^{(k-1)} - [\partial_{\theta}^2 l_n(\hat{\theta}^{(k-1)})]^{-1} [\partial_{\theta} l_n(\theta^*)] + (\theta^* - \hat{\theta}^{(k-1)}) + [\partial_{\theta}^2 l_n(\hat{\theta}^{(k-1)})]^{-1} R_n[(\theta^* - \hat{\theta}^{(k-1)})^2] \end{aligned}$$

となる. ゆえに,

$$\hat{\theta}^{(k)} - \theta^* = -[\partial_{\theta}^2 l_n(\hat{\theta}^{(k-1)})]^{-1} [\partial_{\theta} l_n(\theta^*)] + [\partial_{\theta}^2 l_n(\hat{\theta}^{(k-1)})]^{-1} R_n[(\hat{\theta}^{(k-1)} - \theta^*)^2].$$

特に,  $2q \leq 1/2$  のとき (初期推定量  $\hat{\theta}^{(0)}$  が  $\sqrt{n}$ -一致性が保証されていない場合),

$$n^{2q}(\hat{\theta}^{(1)} - \theta^*) = - \left[ \frac{1}{n} \partial_{\theta}^2 l_n(\hat{\theta}^{(0)}) \right]^{-1} \left[ \frac{n^{2q}}{n} \partial_{\theta} l_n(\theta^*) \right] + \left[ \frac{1}{n} \partial_{\theta}^2 l_n(\hat{\theta}^{(0)}) \right]^{-1} \frac{1}{n} R_n[(n^q(\hat{\theta}^{(0)} - \theta^*))^2].$$

したがって,  $\frac{1}{\sqrt{n}} \partial_{\theta} l_n(\theta^*)$  や  $\frac{1}{n} R_n$  の可積分性などの正則条件の下で,

$$\sup_n E_{\theta^*} [|n^q(\hat{\theta}^{(0)} - \theta^*)|^M] < \infty \implies \sup_n E_{\theta^*} [|n^{2q}(\hat{\theta}^{(1)} - \theta^*)|^M] < \infty$$

が言える. これを繰り返すことによって, マルチステップ推定量は, ある正則条件の下で

$$\begin{aligned} \sup_n E_{\theta^*} [|n^{2q}(\hat{\theta}^{(1)} - \theta^*)|^M] < \infty &\implies \sup_n E_{\theta^*} [|n^{2^2q}(\hat{\theta}^{(2)} - \theta^*)|^M] < \infty, \\ &\vdots \\ \sup_n E_{\theta^*} [|n^{2^{J-2}q}(\hat{\theta}^{(J-2)} - \theta^*)|^M] < \infty &\implies \sup_n E_{\theta^*} [|n^{2^{J-1}q}(\hat{\theta}^{(J-1)} - \theta^*)|^M] < \infty, \\ \sup_n E_{\theta^*} [|n^{2^{J-1}q}(\hat{\theta}^{(J-1)} - \theta^*)|^M] < \infty &\implies \sup_n E_{\theta^*} [| \sqrt{n}(\hat{\theta}^{(J)} - \theta^*)|^M] < \infty \end{aligned}$$

となり,  $J$ -ステップ推定量  $\hat{\theta}^{(J)}$  は漸近有効になる. 注目すべきことは, (1.1) からわかるように, この初期推定量は最適な収束率をもつことを仮定していないが, マルチステップ推定量は最適な収束率をもつことである. よく知られているワンステップ推定量は初期推定量が  $\sqrt{n}$ -一致性をもつことを仮定している. このことから, 初期推定量の条件が緩いマルチステップ推定量がより有用であることがわかる.

(1.1) を満足する初期推定量として, 最尤型推定量とベイズ型推定量を考えることができるが,

最尤型推定量の導出には最適化が伴い、初期値の設定が重要な鍵となる．一方で、ベイズ型推定量は、マルコフチェーンモンテカルロ (MCMC) 法を用いた数値計算により導出される．最尤型推定量の数値計算に比べて、ベイズ型推定量の数値計算は初期値の影響が少ない．本論文では、ベイズ型推定量を初期推定量として用いて、最尤型推定 (マルチステップ推定) により、漸近有効推定量を導出する方法をハイブリッド推定法と呼ぶことにする．特に、初期ベイズ推定量を用いたマルチステップ推定法をハイブリッドマルチステップ推定法と表現することにする．

本論文の構成は次の通りである．第 2 節では、エルゴード的拡散過程について 3 種類のハイブリッドマルチステップ推定量を提案し、モーメント収束性などの漸近的性質について論じる．また、具体例とシミュレーション結果を示す．第 3 節では、非エルゴード的拡散過程についてハイブリッドマルチステップ推定量を提案し、モーメント収束性を含めた漸近的性質について説明する．ハイブリッドマルチステップ推定量の具体例とシミュレーション結果を述べる．第 4 節では、微小拡散過程について、適応的最尤型推定量と適応的ベイズ型推定量について考察し、それらを混合したハイブリッド推定量を提案し、その漸近的性質について概説する．ハイブリッド推定量の具体例と数値実験結果について言及する．

言うまでもなく、推定量の極限分布は統計的漸近理論には必須であり、モデル選択問題における情報量規準を正当化するために、推定量のモーメントの収束性を示すことは不可欠である．幾多の統計的漸近理論の研究があるが、特に Ibragimov and Has'minskii (1981), Kutoyants (1984, 2004), Yoshida (2011) の精読を薦める．拡散過程のモデル選択に関しては、Uchida and Yoshida (2001, 2004a, 2006, 2016), Uchida (2010) を参照．

## 2. エルゴード的拡散過程

本節は、Kamatani and Uchida (2015) の結果に従って、エルゴード的拡散過程のドリフトパラメータおよびボラティリティパラメータのハイブリッドマルチステップ推定量を導出し、その漸近的性質を考察する．

### 2.1 モデルと仮定

次の確率微分方程式で定義される  $d$ -次元拡散過程を考える．すなわち、

$$(2.1) \quad dX_t = b(X_t, \beta)dt + a(X_t, \alpha)dw_t, \quad t \geq 0, \quad X_0 = x_0.$$

ここで、 $w$  は  $r$ -次元標準ウィーナー過程、 $x_0$  は初期値、 $\theta = (\alpha, \beta) \in \Theta_1 \times \Theta_2 = \Theta$  で、 $\Theta_1, \Theta_2$  はそれぞれ、 $\mathbf{R}^{m_1}, \mathbf{R}^{m_2}$  のコンパクトで凸な部分集合とする．

さらに、 $b: \mathbf{R}^d \times \Theta_1 \rightarrow \mathbf{R}^d, a: \mathbf{R}^d \times \Theta_2 \rightarrow \mathbf{R}^d \otimes \mathbf{R}^r$  とする． $\theta^* = (\alpha^*, \beta^*)$  は  $\theta$  の真値とする． $\theta^* \in \text{Int}(\Theta)$  であり、パラメータ空間は局所的にリプシッツ境界をもつと仮定する．Adams and Fournier (2003) を参照．データ  $\mathbf{X}_n = (X_{t_i^n})_{0 \leq i \leq n}$  は離散観測され、 $t_i^n = ih_n$  とする． $p$  は整数で  $p \geq 2$  とする． $n \rightarrow \infty$  のとき、 $h_n \rightarrow 0, nh_n^p \rightarrow 0$  であるとし、十分大きな  $n$  に対し  $n^{\epsilon_0} \leq nh_n$  を満たす  $\epsilon_0 \in (0, (p-1)/p)$  が存在するとする． $h_n = 1/n^{1/4}$  の例を考える． $n \rightarrow \infty$  のとき  $nh_n \rightarrow \infty, nh_n^5 \rightarrow 0$  となるが、 $nh_n^4$  は 0 に収束しない．この場合  $p \geq 5$  となる  $p$  を選択する必要がある．

Kutoyants (1984, 2004) に代表されるように連続観測データに基づくエルゴード的拡散過程モデルによる統計推測はこれまで精力的に研究されてきており、離散観測データからのエルゴード的拡散過程モデルによる統計解析についても、今なお多くの研究者によって研究され続けている．Prakasa Rao (1983, 1988), Yoshida (1992c, 2011), Bibby and Sørensen (1995), Kessler (1995, 1997), Gobet (2002), Uchida (2010), Uchida and Yoshida (2001, 2011, 2012, 2014),

Masuda (2013a, 2013b)を参照. また, ジャンプ付拡散過程とレヴィ過程については Shimizu and Yoshida (2006), Shimizu (2006), Ogihara and Yoshida (2011), Masuda (2013a, 2013b)を参照.

特に Kessler (1995, 1997)は,  $nh_n^p \rightarrow 0$  の仮定の下での 1 次元拡散過程の疑似対数尤度関数  $U_{p,n}(\alpha, \beta)$  を提案している.  $k_0 = [\frac{p}{2}]$ ,  $A(x, \alpha) = aa^*(x, \alpha)$  とおく. ここで  $\star$  は転置とする.  $L_\theta$  は拡散過程 (2.1) の生成作用素, すなわち,  $L_\theta = \sum_{i=1}^d b_i(x, \beta) \partial_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d A_{ij}(x, \alpha) \partial_i \partial_j$  とする.  $\Delta X_i = X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n}$ ,  $A_{i-1}(\alpha) = A(X_{t_{i-1}^n}, \alpha)$ ,  $b_{i-1}(\beta) = b(X_{t_{i-1}^n}, \beta)$  とする.  $\xrightarrow{p}$  と  $\xrightarrow{d}$  はそれぞれ, 確率収束と分布収束を表す. 同じサイズの行列  $A, B$  に対し,  $A^{\otimes 2} = AA^*$ ,  $B[A] = \text{tr}(BA^*)$  を定義する.  $|\cdot|$  はユークリッド距離を表し, 行列  $A$  に対し,  $\|A\|^2 = \text{tr}(AA^*)$  とする.

疑似対数尤度関数  $U_{p,n}(\theta)$  は次のように定義される.

$$U_{p,n}(\theta) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left\{ h_n^{-1} \left\{ \sum_{j=0}^{k_0} h_n^j D_{i-1}^{(j)}(\theta) \right\} [(X_{t_i^n} - r_{i-1}^{(k_0)}(h_n, \theta))^{\otimes 2}] + \sum_{j=0}^{k_0} h_n^j E_{i-1}^{(j)}(\theta) \right\}.$$

ここで  $(r_{i-1}^{(k_0)}(h_n, \theta))_m = \sum_{j=0}^{k_0} \frac{h_n^j}{j!} L_\theta^j f_m(X_{t_{i-1}^n})$ ,  $f_m(x) = x_m$  である. さらに  $j = 0, 1, \dots$  に対し,  $D_{i-1}^{(j)}(\theta) := D^{(j)}(X_{t_{i-1}^n}, \theta)$ ,  $E_{i-1}^{(j)}(\theta) := E^{(j)}(X_{t_{i-1}^n}, \theta)$  を次のように定義する.  $q, r = 1, \dots, d$  に対し,

$$\begin{aligned} (\Xi^{(l)}(h_n, x, \theta^*))_{qr} &= \sum_{v=0}^l h_n^v \sum_{w=0}^{l-v} \frac{h_n^w}{w!} L_\theta^w \bar{g}_{qr,x,\theta}^{(v)}(x), \\ \bar{g}_{qr,x,\theta}^{(0)}(y) &= (y_q - x_q)(y_r - x_r), \\ \bar{g}_{qr,x,\theta}^{(j)}(y) &= -(y_q - x_q) \frac{L_\theta^j f_r(x)}{j!} - (y_r - x_r) \frac{L_\theta^j f_q(x)}{j!} \\ &\quad + \sum_{\substack{r \geq 1, s \geq 1 \\ r+s=j}} \frac{L_\theta^r f_q(x)}{r!} \frac{L_\theta^s f_r(x)}{s!}, \quad (1 \leq j \leq l). \end{aligned}$$

$(\Xi^{(l)}(h_n, x, \theta))_{qr} = \sum_{j=0}^l h_n^j \gamma_{qr}^{(j)}(x, \theta)$  とおけば,

$$\begin{aligned} \gamma_{qr}^{(0)}(x, \theta) &= 0, \\ \gamma_{qr}^{(1)}(x, \theta) &= A_{qr}(x, \alpha), \\ \gamma_{qr}^{(2)}(x, \theta) &= \frac{1}{2} \left\{ L_\theta A_{qr}(x, \alpha) + \sum_{j=1}^d \{ (\partial_{x_j} b_q(x, \beta)) A_{jr}(x, \alpha) + (\partial_{x_j} b_r(x, \beta)) A_{jq}(x, \alpha) \} \right\} \end{aligned}$$

となる. オーダー  $l$  までの  $(h_n^{-1} \Xi^{(l)}(h_n, x, \theta))^{-1}$  のテイラー展開は  $\sum_{j=0}^l h_n^j D^{(j)}(x, \theta)$  であり,

$$\begin{aligned} D^{(0)}(x, \theta) &= A^{-1}(x, \alpha), \\ D^{(1)}(x, \theta) &= -A^{-1}(x, \alpha) \gamma^{(2)}(x, \theta) A^{-1}(x, \alpha), \\ D^{(2)}(x, \theta) &= \{ (A^{-1}(x, \alpha) \gamma^{(2)}(x, \theta))^2 - A^{-1}(x, \alpha) \gamma^{(3)}(x, \theta) \} A^{-1}(x, \alpha) \end{aligned}$$

となる. 同様に, オーダー  $l$  までの  $\log \det(h_n^{-1} \Xi^{(l)}(h_n, x, \theta))$  のテイラー展開は  $\sum_{j=0}^l h_n^j E^{(j)}(x, \theta)$  であり,

$$\begin{aligned} E^{(0)}(x, \theta) &= \log \det(A(x, \alpha)), \\ E^{(1)}(x, \theta) &= \text{tr}(A^{-1}(x, \alpha) \gamma^{(2)}(x, \theta)), \\ E^{(2)}(x, \theta) &= \frac{1}{2} \text{tr}(2A^{-1}(x, \alpha) \gamma^{(3)}(x, \theta) - \{ (A^{-1}(x, \alpha) \gamma^{(2)}(x, \theta))^2 \}) \end{aligned}$$

となる．疑似対数尤度関数  $U_{p,n}(\alpha, \beta)$  の詳細については Kessler (1997) や Uchida and Yoshida (2012) を参照．Kessler (1997) は同時最尤型推定量  $\hat{\theta}_{p,n} = (\hat{\alpha}_{p,n}, \hat{\beta}_{p,n})$  を  $U_{p,n}(\hat{\alpha}_{p,n}, \hat{\beta}_{p,n}) = \sup_{\alpha, \beta} U_{p,n}(\alpha, \beta)$  と定義し， $n \rightarrow \infty$ ， $nh_n^p \rightarrow 0$  のとき，次のような漸近正規性を持つことを示した．

$$(\sqrt{n}(\hat{\alpha}_{p,n} - \alpha^*), \sqrt{nh_n}(\hat{\beta}_{p,n} - \beta^*)) \xrightarrow{d} (\zeta_1, \zeta_2) \sim N_{m_1+m_2}(0, \Gamma(\theta^*)^{-1}).$$

ここで，

$$\begin{aligned} \Gamma(\theta^*) &= \begin{pmatrix} (\Gamma_1^{ij}(\theta^*))_{1 \leq i, j \leq m_1} & 0 \\ 0 & (\Gamma_2^{ij}(\theta^*))_{1 \leq i, j \leq m_2} \end{pmatrix}, \\ \Gamma_1^{ij}(\theta^*) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^d} \text{tr}\{A^{-1}(\partial_{\alpha_i} A)A^{-1}(\partial_{\alpha_j} A)(x, \alpha^*)\} \mu_{\theta^*}(dx), \\ \Gamma_2^{ij}(\theta^*) &= \int_{\mathbf{R}^d} (\partial_{\beta_i} b(x, \beta^*))^* A(x, \alpha^*)^{-1} \partial_{\beta_j} b(x, \beta^*) \mu_{\theta^*}(dx). \end{aligned}$$

しかし，先述した通り， $\Theta$  の次元が大きいとき，同時最尤型推定量の導出は困難となる．Yoshida (1992c) は  $nh_n^3 \rightarrow 0$  という仮定での適応的最尤型推定を考察した．適応的最尤型推定とはドリフトパラメータと拡散係数パラメータを別々に推定する有効な方法である． $nh_n^p \rightarrow 0$  については Kessler (1995) を参照．Uchida and Yoshida (2012, 2014) は Ibragimov-Has'minskii-Kutoyants の手法 (Ibragimov and Has'minskii, 1981; Kutoyants, 1984, 2004) と Yoshida (2011) の結果を応用して，モーメント収束性を有する 3 種類の適応的最尤型推定量と適応的バイズ型推定量を提案した． $k_0, l_0$  は整数で， $k_0 = \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ ， $l_0 = \lfloor \frac{p-1}{2} \rfloor$  とする．ここで  $l_0 \leq k_0 \leq l_0 + 1$  であることに注意する．タイプ I の適応的最尤型推定量  $\hat{\alpha}_{p,n}^{(l_0)}$ ， $\hat{\beta}_{p,n}^{(k_0)}$  は  $k = 1, 2, \dots, k_0$  に対し，

$$\begin{aligned} U_{p,n}(\hat{\alpha}_{p,n}^{(k-1)}, \hat{\beta}_{p,n}^{(k)}) &= \sup_{\beta \in \Theta_2} U_{p,n}(\hat{\alpha}_{p,n}^{(k-1)}, \beta), \\ U_{p,n}(\hat{\alpha}_{p,n}^{(k)}, \hat{\beta}_{p,n}^{(k)}) &= \sup_{\alpha \in \Theta_1} U_{p,n}(\alpha, \hat{\beta}_{p,n}^{(k)}) \end{aligned}$$

で定義される．ここで， $\hat{\alpha}_{p,n}^{(0)} = \hat{\alpha}_n^{(0)}$  は  $U_n^{(0)}(\hat{\alpha}_n^{(0)}) = \sup_{\alpha \in \Theta_1} U_n^{(0)}(\alpha)$  を満たし，

$$U_n^{(0)}(\alpha) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \{h_n^{-1} A_{i-1}^{-1}(\alpha) [(\Delta X_i)^{\otimes 2}] + \log \det(A_{i-1}(\alpha))\}$$

である．

次に適応的バイズ型推定について考える．事前分布  $\pi_1(\alpha)$ ， $\pi_2(\beta)$  は連続で

$$\inf_{\alpha \in \Theta_1} \pi_1(\alpha) > 0, \quad \inf_{\beta \in \Theta_2} \pi_2(\beta) > 0$$

を満たすとする．タイプ I の適応的バイズ型推定量  $\tilde{\alpha}_{p,n}^{(l_0)}$ ， $\tilde{\beta}_{p,n}^{(k_0)}$  は次のように定義される． $k = 1, 2, \dots, l_0$  に対し，

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_{p,n}^{(k-1)} &= \frac{\int_{\Theta_1} \alpha \exp\{\mathbb{H}_{p,n}^{(k-1)}(\alpha, \tilde{\beta}_{p,n}^{(k-1)})\} \pi_1(\alpha) d\alpha}{\int_{\Theta_1} \exp\{\mathbb{H}_{p,n}^{(k-1)}(\alpha, \tilde{\beta}_{p,n}^{(k-1)})\} \pi_1(\alpha) d\alpha}, \quad \tilde{\beta}_{p,n}^{(k)} = \frac{\int_{\Theta_2} \beta \exp\{\tilde{\mathbb{H}}_{p,n}^{(k)}(\tilde{\alpha}_{p,n}^{(k-1)}, \beta)\} \pi_2(\beta) d\beta}{\int_{\Theta_2} \exp\{\tilde{\mathbb{H}}_{p,n}^{(k)}(\tilde{\alpha}_{p,n}^{(k-1)}, \beta)\} \pi_2(\beta) d\beta}, \\ \tilde{\alpha}_{p,n}^{(l_0)} &= \frac{\int_{\Theta_1} \alpha \exp\{U_{p,n}(\alpha, \tilde{\beta}_{p,n}^{(l_0)})\} \pi_1(\alpha) d\alpha}{\int_{\Theta_1} \exp\{U_{p,n}(\alpha, \tilde{\beta}_{p,n}^{(l_0)})\} \pi_1(\alpha) d\alpha}, \quad \tilde{\beta}_{p,n}^{(l_0+1)} = \frac{\int_{\Theta_2} \beta \exp\{U_{p,n}(\tilde{\alpha}_{p,n}^{(l_0)}, \beta)\} \pi_2(\beta) d\beta}{\int_{\Theta_2} \exp\{U_{p,n}(\tilde{\alpha}_{p,n}^{(l_0)}, \beta)\} \pi_2(\beta) d\beta}. \end{aligned}$$

$k_0 = l_0$  のとき， $\tilde{\beta}_{p,n}^{(l_0+1)}$  は不要であることに注意する．さらに  $k = 1, 2, \dots, l_0$  に対し

$$\begin{aligned}\mathbb{H}_{p,n}^{(0)}(\alpha, \beta) &= \frac{1}{n^{1-\frac{2}{p}}} U_n^{(0)}(\alpha), \\ \mathbb{H}_{p,n}^{(k)}(\alpha, \beta) &= \frac{1}{n^{1-\frac{2(k+1)}{p}}} U_{p,n}(\alpha, \beta), \\ \tilde{\mathbb{H}}_{p,n}^{(k)}(\alpha, \beta) &= \frac{1}{(nh_n)^{1-\frac{2k}{p-1}}} U_{p,n}(\alpha, \beta).\end{aligned}$$

$p \geq 3$  の場合, Uchida and Yoshida (2014) は  $n \rightarrow \infty$ ,  $nh_n^p \rightarrow 0$  のとき, すべての  $M > 0$  に対し,

$$\sup_n E_{\theta^*} [|n^{\frac{1}{p}}(\tilde{\alpha}_{p,n}^{(0)} - \alpha^*)|^M] < \infty, \quad \sup_n E_{\theta^*} [(nh_n)^{\frac{1}{p-1}}(\tilde{\beta}_{p,n}^{(1)} - \beta^*)|^M] < \infty$$

が成り立つことを示した.  $\tilde{\alpha}_n^{(0)}$ ,  $\tilde{\beta}_n^{(1)}$  の収束率は疑似対数尤度関数  $U_n^{(0)}$ ,  $U_{p,n}$  の正規化に依存することに注意する. Uchida and Yoshida (2012, 2014) は適応的最尤型推定量と適応的ベイズ型推定量が漸近正規性およびモーメント収束性を有することを示した. 最尤型推定量を求めるためには最適化が必要であり, ベイズ型推定量の計算には多大な時間を要することはよく知られている.

次にワンステップ推定量を考えてみる. すべての  $M > 0$  に対し  $n \rightarrow \infty$ ,  $nh_n^p \rightarrow 0$  のとき

$$(2.2) \quad \sup_{n \in \mathcal{N}} E_{\theta^*} [ |(\sqrt{n}(\tilde{\alpha}_{p,n}^{(0)} - \alpha^*), \sqrt{nh_n}(\tilde{\beta}_{p,n}^{(0)} - \beta^*))|^M ] < \infty$$

を満たす初期推定量  $\tilde{\theta}_{p,n}^{(0)} = (\tilde{\alpha}_{p,n}^{(0)}, \tilde{\beta}_{p,n}^{(0)})$  を用いて, ワンステップ推定量  $\tilde{\theta}_{p,n}^{(1)} = (\tilde{\alpha}_{p,n}^{(1)}, \tilde{\beta}_{p,n}^{(1)})$  は

$$\tilde{\theta}_{p,n}^{(1)} = \tilde{\theta}_{p,n}^{(0)} - [\partial_{\theta}^2 U_{p,n}(\tilde{\theta}_{p,n}^{(0)})]^{-1} \partial_{\theta} U_{p,n}(\tilde{\theta}_{p,n}^{(0)})$$

で定義される. ある正則条件の下で,  $n \rightarrow \infty$ ,  $nh_n^p \rightarrow 0$  のとき

$$E_{\theta^*} [f(\sqrt{n}(\tilde{\alpha}_{p,n}^{(1)} - \alpha^*), \sqrt{nh_n}(\tilde{\beta}_{p,n}^{(1)} - \beta^*))] \rightarrow \mathbb{E}[f(\zeta_1, \zeta_2)]$$

がすべての多項式増大な連続関数  $f$  に対して成り立つ. ワンステップ推定量についての詳細は Lehmann (1999) などを参照. しかし確率微分方程式モデルの場合, モーメント条件 (2.2) を満たす初期推定量  $\tilde{\theta}_{p,n}^{(0)}$  の導出は容易ではない.

以上の理由から, 本節では,  $nh_n^p \rightarrow 0$  という一般的な仮定の下で, 初期推定量の条件を緩めたハイブリッドマルチステップ推定量を提案し, その推定量が漸近正規性とモーメント収束性をもつことを示す.

これ以降に用いる記号を定義しておく.  $C_{\uparrow}^{k,l}(\mathbf{R}^d \times \Theta; \mathbf{R}^d)$  は次の条件を満たす関数  $f$  の空間とする: (i)  $f(x, \theta)$  は  $\mathbf{R}^d \times \Theta$  上の  $\mathbf{R}^d$ -値関数である. (ii)  $f(x, \theta)$  は  $x$  に関して  $k$  回連続微分可能で, それらの導関数は  $\theta$  について一様に,  $x$  に関する多項式増大である. (iii)  $|\mathbf{n}| = 0, 1, \dots, k$  に対し,  $\partial^{\mathbf{n}} f(x, \theta)$  は  $\theta$  に関して  $l$  回連続微分可能である. さらに,  $|\nu| = 1, \dots, l$ ,  $|\mathbf{n}| = 0, 1, \dots, k$  に対し  $\delta^{\nu} \partial^{\mathbf{n}} f(x, \theta)$  は  $\theta$  について一様に,  $x$  に関する多項式増大である. ここで,  $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_d)$ ,  $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_m)$  はマルチインデックスであり,  $m = \dim(\Theta)$ ,  $|\mathbf{n}| = n_1 + \dots + n_d$ ,  $|\nu| = \nu_1 + \dots + \nu_m$ ,  $\partial^{\mathbf{n}} = \partial_1^{n_1} \dots \partial_d^{n_d}$ ,  $\partial_i = \partial / \partial x_i$ ,  $\delta^{\nu} = \delta_{\theta_1}^{\nu_1} \dots \delta_{\theta_m}^{\nu_m}$ ,  $\delta_{\theta_i} = \partial / \partial \theta_i$  である.  $\mathcal{F}_{\uparrow}(\mathbf{R}^d)$  は,  $f(x)$  が  $x$  に関して多項式増大な  $\mathbf{R}^d$  上の  $\mathbf{R}$ -値関数となるような可測関数の空間とする.

次を仮定する.

[A1] (i) ある定数  $K > 0$  が存在して, すべての  $x, y \in \mathbf{R}^d$  に対し,

$$\sup_{\alpha \in \Theta_1} |a(x, \alpha) - a(y, \alpha)| + \sup_{\beta \in \Theta_2} |b(x, \beta) - b(y, \beta)| \leq K|x - y|.$$

(ii)  $\inf_{x, \alpha} \det(A(x, \alpha)) > 0$ .

(iii)  $X_t$  の不変測度  $\mu_{\theta^*}$  がただ一つ存在し,  $\int_{\mathbf{R}^d} |f(x)| \mu_{\theta^*}(dx) < \infty$  を満たす任意の  $f \in \mathcal{F}_{\uparrow}(\mathbf{R}^d)$  に対し,  $T \rightarrow \infty$  のとき,

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(X_t) dt \xrightarrow{P} \int_{\mathbf{R}^d} f(x) \mu_{\theta^*}(dx)$$

が成り立つ.

(iv) すべての  $M > 0$  に対して,  $\sup_t E[|X_t|^M] < \infty$ .

(v)  $\int_{\mathbf{R}^d} g(x) \mu_{\theta^*}(dx) = 0$  を満たす任意の  $g \in \mathcal{F}_{\uparrow}(\mathbf{R}^d)$  に対し, ある関数  $G(x)$ ,  $\partial_{x_i} G(x) \in \mathcal{F}_{\uparrow}(\mathbf{R}^d)$  ( $i = 1, \dots, d$ ) が存在し, すべての  $x$  に対し,

$$L_{\theta^*} G(x) = -g(x).$$

(vi)  $\Gamma(\theta^*)$  は正則.

[A2]  $(\mathbf{k}, \mathbf{l}) a \in C_{\uparrow}^{k,4}(\mathbf{R}^d \times \Theta_1; \mathbf{R}^d)$ .  $b \in C_{\uparrow}^{l,4}(\mathbf{R}^d \times \Theta_2; \mathbf{R}^d \otimes \mathbf{R}^r)$ .

注 1. [A1] の十分条件については, Uchida and Yoshida (2012) を参照.

## 2.2 ハイブリッドマルチステップ推定量

初期推定量に対して次を仮定する.

[B]  $p \geq 2$ ,  $q = \max\{p, 4\}$  とする.

(i)  $\alpha$  の初期推定量  $\hat{\alpha}_n^{(0)}$  は  $n \rightarrow \infty$ ,  $nh_n^p \rightarrow 0$  のとき, すべての  $M_1 > 0$  に対し

$$n^{\frac{1}{q}}(\hat{\alpha}_n^{(0)} - \alpha^*) \rightarrow^P 0, \quad \sup_n E_{\theta^*}[|n^{\frac{1}{q}}(\hat{\alpha}_n^{(0)} - \alpha^*)|^{M_1}] < \infty$$

を満たす.

(ii)  $\beta$  の初期推定量  $\hat{\beta}_n^{(0)}$  は  $n \rightarrow \infty$ ,  $nh_n^p \rightarrow 0$  のとき, すべての  $M_2 > 0$  に対し

$$(nh_n)^{\frac{1}{q-1}}(\hat{\beta}_n^{(0)} - \beta^*) \rightarrow^P 0, \quad \sup_n E_{\theta^*}[|(nh_n)^{\frac{1}{q-1}}(\hat{\beta}_n^{(0)} - \beta^*)|^{M_2}] < \infty$$

を満たす.

[B] を満たす初期推定量は次のように得ることができる.

$$\mathbb{Y}(\alpha) = -\frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^d} \left\{ \text{tr}[A(x, \alpha)^{-1} A(x, \alpha^*) - I_d] + \log \frac{\det(A(x, \alpha))}{\det(A(x, \alpha^*))} \right\} \mu_{\theta^*}(dx)$$

とおき, 以下を仮定する.

[A3] すべての  $\alpha \in \Theta_1$  に対し,  $\mathbb{Y}(\alpha) \leq -\chi|\alpha - \alpha^*|^2$  となる正定数  $\chi$  が存在する.

初期最尤型推定量  $\hat{\alpha}_n^{(0)}$  は  $U_n^{(0)}(\hat{\alpha}_n^{(0)}) = \sup_{\alpha \in \Theta_1} U_n^{(0)}(\alpha)$  で定義される. ここで

$$U_n^{(0)}(\alpha) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \{h_n^{-1} A_{i-1}^{-1}(\alpha) [(\Delta X_i)^{\otimes 2}] + \log \det(A_{i-1}(\alpha))\}.$$

初期ベイズ型推定量  $\tilde{\alpha}_n^{(0)}$  は

$$\tilde{\alpha}_n^{(0)} = \frac{\int_{\Theta_1} \alpha \exp \left\{ \frac{1}{n^{\frac{1-\frac{2}{q}}}} U_n^{(0)}(\alpha) \right\} \pi_1(\alpha) d\alpha}{\int_{\Theta_1} \exp \left\{ \frac{1}{n^{\frac{1-\frac{2}{q}}}} U_n^{(0)}(\alpha) \right\} \pi_1(\alpha) d\alpha}$$

で定義される.

**命題 1.** (Uchida and Yoshida, 2012, 2014)  $p \geq 2$ ,  $q = \max\{p, 4\}$  とする. [A1], [A2] (2, 2), [A3] を仮定する.  $n \rightarrow \infty$ ,  $nh_n^p \rightarrow 0$  のとき, すべての  $M > 0$  に対して, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned} n^{\frac{1}{q}}(\check{\alpha}_n^{(0)} - \alpha^*) &\rightarrow^p 0, \quad \sup_n E_{\theta^*}[|n^{\frac{1}{q}}(\check{\alpha}_n^{(0)} - \alpha^*)|^M] < \infty, \\ n^{\frac{1}{q}}(\tilde{\alpha}_n^{(0)} - \alpha^*) &\rightarrow^p 0, \quad \sup_n E_{\theta^*}[|n^{\frac{1}{q}}(\tilde{\alpha}_n^{(0)} - \alpha^*)|^M] < \infty. \end{aligned}$$

さらに,

$$\tilde{\Psi}(\beta) = -\frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^d} A(x, \alpha^*)^{-1} [(b(x, \beta) - b(x, \beta^*))^{\otimes 2}] \mu_{\theta^*}(dx)$$

とし, もう一つの仮定をおく.

[A4] すべての  $\beta \in \Theta_2$  に対し,  $\tilde{\Psi}(\beta) \leq -\tilde{\chi}|\beta - \beta^*|^2$  となる正定数  $\tilde{\chi}$  が存在する.

**注 2.** [A3] と [A4] の十分条件については, Fujii and Uchida (2014) の Remark 2 を参照.

初期最尤型推定量  $\check{\beta}_n^{(0)}$  は  $U_n^{(1)}(\check{\alpha}_n^{(0)}, \check{\beta}_n^{(0)}) = \sup_{\beta \in \Theta_2} U_n^{(1)}(\check{\alpha}_n^{(0)}, \beta)$  で定義される. ここで

$$U_n^{(1)}(\alpha, \beta) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \{h_n^{-1} A_{i-1}^{-1}(\alpha) [(\Delta X_i - h_n b_{i-1}(\beta))^{\otimes 2}]\}.$$

初期ベイズ型推定量  $\tilde{\beta}_n^{(0)}$  は

$$\tilde{\beta}_n^{(0)} = \frac{\int_{\Theta_2} \beta \exp \left\{ \frac{1}{(nh_n)^{1-\frac{2}{q-1}}} U_n^{(1)}(\tilde{\alpha}_n^{(0)}, \beta) \right\} \pi_2(\beta) d\beta}{\int_{\Theta_2} \exp \left\{ \frac{1}{(nh_n)^{1-\frac{2}{q-1}}} U_n^{(1)}(\tilde{\alpha}_n^{(0)}, \beta) \right\} \pi_2(\beta) d\beta}$$

で定義される.

**命題 2.** (Uchida and Yoshida, 2012, 2014)  $p \geq 2$ ,  $q = \max\{p, 4\}$  とする. [A1], [A2] (2, 3), [A3], [A4] を仮定する.  $n \rightarrow \infty$ ,  $nh_n^p \rightarrow 0$  のとき, すべての  $M > 0$  に対して,

$$\begin{aligned} (nh_n)^{\frac{1}{q-1}}(\check{\beta}_n^{(0)} - \beta^*) &\rightarrow^p 0, \quad \sup_n E_{\theta^*}[|(nh_n)^{\frac{1}{q-1}}(\check{\beta}_n^{(0)} - \beta^*)|^M] < \infty, \\ (nh_n)^{\frac{1}{q-1}}(\tilde{\beta}_n^{(0)} - \beta^*) &\rightarrow^p 0, \quad \sup_n E_{\theta^*}[|(nh_n)^{\frac{1}{q-1}}(\tilde{\beta}_n^{(0)} - \beta^*)|^M] < \infty \end{aligned}$$

が成り立つ.

次に, マルチステップ推定量について考える.  $p \geq 2$ ,  $q = \max\{p, 4\}$ ,  $k_0 = \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ ,  $l_0 = \lfloor \frac{q-1}{2} \rfloor$ ,  $m_0 = \lfloor \frac{q-2}{2} \rfloor$  とする. 疑似対数尤度関数  $U_{p,n}(\theta)$  は,  $p = 2$  のとき,

$$U_{2,n}(\theta) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \{h_n^{-1} A_{i-1}^{-1}(\alpha) [(\Delta X_i - h_n b_{i-1}(\beta))^{\otimes 2}] + \log \det(A_{i-1}(\alpha))\}$$

で定義される.  $p \geq 3$  に対しては,

$$U_{p,n}(\theta) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left\{ h_n^{-1} \left\{ \sum_{j=0}^{k_0} h_n^j D_{i-1}^{(j)}(\theta) \right\} [(X_{t_i^n} - r_{i-1}^{(k_0)}(h_n, \theta))^{\otimes 2}] + \sum_{j=0}^{k_0} h_n^j E_{i-1}^{(j)}(\theta) \right\}$$

となる.

$$J_{p,n}(\alpha, \beta) := \left\{ \frac{1}{n} \partial_\alpha^2 U_{p,n}(\alpha, \beta) \text{ は正則} \right\},$$



$$\begin{aligned}
K_{p,n}(\alpha, \beta) &:= \left\{ \frac{1}{nh_n} \partial_\beta^2 U_{p,n}(\alpha, \beta) \text{ は正則} \right\}, \\
\Gamma_{p,n}(\alpha, \beta) &:= \frac{1}{n} \partial_\alpha^2 U_{p,n}(\alpha, \beta) 1_{J_{p,n}(\alpha, \beta)} + E_{m_1} 1_{J_{p,n}^c(\alpha, \beta)}, \\
\Xi_{p,n}(\alpha, \beta) &:= \frac{1}{nh_n} \partial_\beta^2 U_{p,n}(\alpha, \beta) 1_{K_{p,n}(\alpha, \beta)} + E_{m_2} 1_{K_{p,n}^c(\alpha, \beta)},
\end{aligned}$$

とおく．ここで， $E_m$  は  $m$  次単位行列， $1_K(\omega)$  は  $\omega \in K$  のとき  $1_K(\omega) = 1$ ， $\omega \in K^c$  のとき  $1_K(\omega) = 0$  であるとする．[B] において  $(\hat{\alpha}_{I,n}^{(0)}, \hat{\beta}_{I,n}^{(0)}) = (\hat{\alpha}_n^{(0)}, \hat{\beta}_n^{(0)})$  とする．タイプ I のマルチステッブ推定量  $\hat{\alpha}_{I,n}^{(l_0)}, \hat{\beta}_{I,n}^{(m_0)}$  は， $k = 1, \dots, l_0$  に対し，

$$\begin{aligned}
\hat{\alpha}_{I,n}^{(k)} &= \hat{\alpha}_{I,n}^{(k-1)} - \Gamma_{p,n}^{-1}(\hat{\alpha}_{I,n}^{(k-1)}, \hat{\beta}_{I,n}^{(k-1)}) \frac{1}{n} \partial_\alpha U_{p,n}(\hat{\alpha}_{I,n}^{(k-1)}, \hat{\beta}_{I,n}^{(k-1)}), \\
\hat{\beta}_{I,n}^{(k)} &= \hat{\beta}_{I,n}^{(k-1)} - \Xi_{p,n}^{-1}(\hat{\alpha}_{I,n}^{(k)}, \hat{\beta}_{I,n}^{(k-1)}) \frac{1}{nh_n} \partial_\beta U_{p,n}(\hat{\alpha}_{I,n}^{(k)}, \hat{\beta}_{I,n}^{(k-1)})
\end{aligned}$$

で定義される．

次に，タイプ II のマルチステッブ推定量を考える．[B] において  $(\hat{\alpha}_{II,n}^{(0)}, \hat{\beta}_{II,n}^{(0)}) = (\hat{\alpha}_n^{(0)}, \hat{\beta}_n^{(0)})$  とする． $U_{0,n}(\theta) = U_n^{(0)}(\alpha)$ ， $U_{1,n}(\theta) = U_n^{(1)}(\theta)$  とする． $p = 2$  ( $l_0 = m_0 = 1$ ) のとき，

$$\begin{aligned}
\hat{\alpha}_{II,n}^{(1)} &= \hat{\alpha}_{II,n}^{(0)} - \Gamma_{0,n}^{-1}(\hat{\alpha}_{II,n}^{(0)}, \hat{\beta}_{II,n}^{(0)}) \frac{1}{n} \partial_\alpha U_{0,n}(\hat{\alpha}_{II,n}^{(0)}, \hat{\beta}_{II,n}^{(0)}), \\
\hat{\beta}_{II,n}^{(1)} &= \hat{\beta}_{II,n}^{(0)} - \Xi_{1,n}^{-1}(\hat{\alpha}_{II,n}^{(1)}, \hat{\beta}_{II,n}^{(0)}) \frac{1}{nh_n} \partial_\beta U_{1,n}(\hat{\alpha}_{II,n}^{(1)}, \hat{\beta}_{II,n}^{(0)})
\end{aligned}$$

と定義する． $p = 3$  ( $l_0 = m_0 = 1$ ) のとき，

$$\begin{aligned}
\hat{\beta}_{II,n}^{(1)} &= \hat{\beta}_{II,n}^{(0)} - \Xi_{1,n}^{-1}(\hat{\alpha}_{II,n}^{(0)}, \hat{\beta}_{II,n}^{(0)}) \frac{1}{nh_n} \partial_\beta U_{1,n}(\hat{\alpha}_{II,n}^{(0)}, \hat{\beta}_{II,n}^{(0)}), \\
\hat{\alpha}_{II,n}^{(1)} &= \hat{\alpha}_{II,n}^{(0)} - \Gamma_{3,n}^{-1}(\hat{\alpha}_{II,n}^{(0)}, \hat{\beta}_{II,n}^{(1)}) \frac{1}{n} \partial_\alpha U_{3,n}(\hat{\alpha}_{II,n}^{(0)}, \hat{\beta}_{II,n}^{(1)})
\end{aligned}$$

と定義する．

$p \geq 4$  のとき，タイプ II のマルチステッブ推定量  $\hat{\alpha}_{II,n}^{(l_0)}, \hat{\beta}_{II,n}^{(m_0)}$  は， $k = 1, \dots, l_0$  に対し，

$$\begin{aligned}
\hat{\alpha}_{II,n}^{(k)} &= \hat{\alpha}_{II,n}^{(k-1)} - \Gamma_{2k+1,n}^{-1}(\hat{\alpha}_{II,n}^{(k-1)}, \hat{\beta}_{II,n}^{(k-1)}) \frac{1}{n} \partial_\alpha U_{2k+1,n}(\hat{\alpha}_{II,n}^{(k-1)}, \hat{\beta}_{II,n}^{(k-1)}), \\
\hat{\beta}_{II,n}^{(k)} &= \hat{\beta}_{II,n}^{(k-1)} - \Xi_{2k+2,n}^{-1}(\hat{\alpha}_{II,n}^{(k)}, \hat{\beta}_{II,n}^{(k-1)}) \frac{1}{nh_n} \partial_\beta U_{2k+2,n}(\hat{\alpha}_{II,n}^{(k)}, \hat{\beta}_{II,n}^{(k-1)})
\end{aligned}$$

で定義される．ここで， $U_{2k+2,n}$  は  $p = 2k+2$  のときの  $U_{p,n}$  と等しいことに注意する．例えば， $p = 4$  ( $l_0 = m_0 = 1$ ) のとき，

$$\begin{aligned}
\hat{\alpha}_{II,n}^{(1)} &= \hat{\alpha}_{II,n}^{(0)} - \Gamma_{3,n}^{-1}(\hat{\alpha}_{II,n}^{(0)}, \hat{\beta}_{II,n}^{(0)}) \frac{1}{n} \partial_\alpha U_{3,n}(\hat{\alpha}_{II,n}^{(0)}, \hat{\beta}_{II,n}^{(0)}), \\
\hat{\beta}_{II,n}^{(1)} &= \hat{\beta}_{II,n}^{(0)} - \Xi_{4,n}^{-1}(\hat{\alpha}_{II,n}^{(1)}, \hat{\beta}_{II,n}^{(0)}) \frac{1}{nh_n} \partial_\beta U_{4,n}(\hat{\alpha}_{II,n}^{(1)}, \hat{\beta}_{II,n}^{(0)}).
\end{aligned}$$

さらにタイプ III のマルチステッブ推定量について考察する．疑似対数尤度関数は， $k = 1, \dots, l_0$  に対し，

$$\begin{aligned}
V_{2k+1,n}(\alpha \mid \bar{\theta}) &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left\{ h_n^{-1} A_{i-1}^{-1}(\alpha) \left[ (X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n})^{\otimes 2} - \sum_{j=2}^{k+1} h_n^j \bar{D}_{i-1}^{(j)}(\bar{\theta}) \right] + \log \det A_{i-1}(\alpha) \right\}, \\
V_{2k+2,n}(\beta \mid \bar{\theta}) &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n h_n^{-1} A_{i-1}^{-1}(\bar{\alpha}) \left[ \left( X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n} - h_n b_{i-1}(\beta) - \sum_{j=2}^{k+1} h_n^j \bar{r}_{i-1}^{(j)}(\bar{\theta}) \right)^{\otimes 2} \right]
\end{aligned}$$

で定義される．ここで， $\bar{\theta} = (\bar{\alpha}, \bar{\beta})$  である．さらに， $l, m = 1, \dots, d$  に対し， $f_l(x) = x_l$ ， $h_{lm}(x) = (x - X_{t_{i-1}^n})_l(x - X_{t_{i-1}^n})_m$ ， $\bar{D}_{i-1}^{(j)}(\bar{\theta})_{lm} = \frac{1}{j!} L_{\bar{\theta}}^j h_{lm}(X_{t_{i-1}^n})$ ， $\bar{r}_{i-1}^{(j)}(\bar{\theta})_l = \frac{1}{j!} L_{\bar{\theta}}^j f_l(X_{t_{i-1}^n})$  である． $V_{2k+1,n}(\alpha \mid \bar{\theta})$  は  $V_{2k+1,n}(\alpha \mid \alpha, \beta)$  でないことに注意する．例えば， $\partial_\alpha V_{2k+1,n}(\alpha \mid \bar{\theta}) \neq \partial_\alpha V_{2k+1,n}(\alpha \mid \alpha, \beta)$  である．

$k = 1, 2, \dots, l_0$  に対し， $\theta = (\alpha, \beta)$  とし，

$$\begin{aligned} J_{2k+1,n,III}(\alpha, \beta) &:= \left\{ \frac{1}{n} \partial_\alpha^2 V_{2k+1,n}(\alpha \mid \bar{\theta}) \Big|_{\bar{\theta}=\theta} \text{ は正則} \right\}, \\ K_{2k+2,n,III}(\alpha, \beta) &:= \left\{ \frac{1}{nh_n} \partial_\beta^2 V_{2k+2,n}(\beta \mid \bar{\theta}) \Big|_{\bar{\theta}=\theta} \text{ は正則} \right\}, \\ \Gamma_{2k+1,n,III}(\alpha, \beta) &:= \frac{1}{n} \partial_\alpha^2 V_{2k+1,n}(\alpha \mid \bar{\theta}) \Big|_{\bar{\theta}=\theta} 1_{J_{2k+1,n,III}(\alpha, \beta)} + E_{m_1} 1_{J_{2k+1,n,III}^c(\alpha, \beta)}, \\ \Xi_{2k+2,n,III}(\alpha, \beta) &:= \frac{1}{nh_n} \partial_\beta^2 V_{2k+2,n}(\beta \mid \bar{\theta}) \Big|_{\bar{\theta}=\theta} 1_{K_{2k+2,n,III}(\alpha, \beta)} + E_{m_2} 1_{K_{2k+2,n,III}^c(\alpha, \beta)} \end{aligned}$$

とする．[B] において  $(\hat{\alpha}_{III,n}^{(0)}, \hat{\beta}_{III,n}^{(0)}) = (\hat{\alpha}_n^{(0)}, \hat{\beta}_n^{(0)})$  とおく． $p = 2, 3$  のとき， $(\hat{\alpha}_{III,n}^{(l_0)}, \hat{\beta}_{III,n}^{(m_0)}) = (\hat{\alpha}_{II,n}^{(l_0)}, \hat{\beta}_{II,n}^{(m_0)})$  とおく． $p \geq 4$  のとき，タイプ III のマルチステップ推定量  $\hat{\alpha}_{III,n}^{(l_0)}$ ， $\hat{\beta}_{III,n}^{(m_0)}$  は， $k = 1, \dots, l_0$  に対して

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_{III,n}^{(k)} &= \hat{\alpha}_{III,n}^{(k-1)} - \Gamma_{2k+1,n,III}^{-1}(\hat{\alpha}_{III,n}^{(k-1)}, \hat{\beta}_{III,n}^{(k-1)}) \frac{1}{n} \partial_\alpha V_{2k+1,n}(\hat{\alpha}_{III,n}^{(k-1)} \mid \hat{\alpha}_{III,n}^{(k-1)}, \hat{\beta}_{III,n}^{(k-1)}), \\ \hat{\beta}_{III,n}^{(k)} &= \hat{\beta}_{III,n}^{(k-1)} - \Xi_{2k+2,n,III}^{-1}(\hat{\alpha}_{III,n}^{(k)}, \hat{\beta}_{III,n}^{(k-1)}) \frac{1}{nh_n} \partial_\beta V_{2k+2,n}(\hat{\beta}_{III,n}^{(k-1)} \mid \hat{\alpha}_{III,n}^{(k)}, \hat{\beta}_{III,n}^{(k-1)}) \end{aligned}$$

で定義される．

**補題 1.** (Kamatani and Uchida, 2015)  $k \in \mathbf{N}$ ， $p \geq 2k + 2$ ， $j = I, II, III$  とする．[A1]，[A2]  $(2k_0, 2k_0 + 1)$ ，[B] を仮定する． $n \rightarrow \infty$ ， $nh^p \rightarrow 0$  のとき，すべての  $M > 0$  に対して，

$$\begin{aligned} \sup_n E_{\theta^*} [ |n^{\frac{k}{p}} (\hat{\alpha}_{j,n}^{(k-1)} - \alpha^*)|^M ] &< \infty, \\ \sup_n E_{\theta^*} [ |(nh_n)^{\frac{k}{p-1}} (\hat{\beta}_{j,n}^{(k-1)} - \beta^*)|^M ] &< \infty. \end{aligned}$$

**定理 1.** (Kamatani and Uchida, 2015)  $p \geq 2$ ， $q = \max\{p, 4\}$ ， $k_0 = [\frac{q}{2}]$ ， $l_0 = [\frac{q-1}{2}]$ ， $m_0 = [\frac{q-2}{2}]$ ， $j = I, II, III$  とする．[A1]，[A2]  $(2k_0, 2k_0 + 1)$ ，[B] を仮定する．このとき， $n \rightarrow \infty$ ， $nh^p \rightarrow 0$  の下，

$$(\sqrt{n}(\hat{\alpha}_{j,n}^{(l_0)} - \alpha^*), \sqrt{nh_n}(\hat{\beta}_{j,n}^{(m_0)} - \beta^*)) \xrightarrow{d} (\zeta_1, \zeta_2) \sim N_{m_1+m_2}(0, \text{diag}[\Gamma_1(\theta^*)^{-1}, \Gamma_2(\theta^*)^{-1}])$$

が成り立つ．さらに，すべての多項式増大な連続関数  $f$  に対して

$$E_{\theta^*} [f(\sqrt{n}(\hat{\alpha}_{j,n}^{(l_0)} - \alpha^*), \sqrt{nh_n}(\hat{\beta}_{j,n}^{(m_0)} - \beta^*))] \rightarrow \mathbb{E}[f(\zeta_1, \zeta_2)]$$

が成り立つ．

3 種類のマルチステップ推定量は，Uchida and Yoshida (2012) における 3 種類の適応的最尤型推定量にそれぞれ対応している．以下， $p \geq 4$  の場合について説明する．タイプ I のマルチステップ推定量は，最適な疑似尤度関数  $U_{p,n}$  に対して，必要回数だけニュートン・ラフソン法を繰り返して導出される．タイプ II のマルチステップ推定量は，疑似尤度関数の精度を徐々に上げながら  $(U_{3,n}, U_{4,n}, \dots, U_{2k+1,n}, U_{2k+2,n})$ ，ニュートン・ラフソン法によって求める．タイプ III のマルチステップ推定量は，タイプ II のマルチステップ推定量で用いた疑似尤度関

数よりもシンプルな疑似尤度関数 ( $V_{3,n}, V_{4,n}, \dots, V_{2k+1,n}, V_{2k+2,n}$ ) を用いて導出される。理論的観点から言えば 3 種類のマルチステップ推定量は同じ漸近的性質を有するが、計算時間はタイプ I > タイプ II > タイプ III となっており、タイプ III のマルチステップ推定量の計算時間が一番短い。一方、タイプ I やタイプ II のマルチステップ推定量はタイプ III のマルチステップ推定量よりも精密な疑似尤度関数を使用しているので、離散観測 (サンプルサイズが有限) におけるタイプ I やタイプ II のマルチステップ推定量のパフォーマンスはタイプ III のマルチステップ推定量と同等もしくはそれよりも良いことが期待される。

### 2.3 例とシミュレーション結果

#### 1 次元拡散過程

$$(2.3) \quad dX_t = \left( \beta_1 - \beta_2 X_t - \frac{\beta_3}{\sqrt{1 + \beta_2 X_t^2}} \right) dt + \frac{\alpha_2 + X_t^2}{1 + \alpha_1 X_t^2} dw_t, \quad X_0 = 2,$$

を考える。ここで、 $\theta = (\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$  は未知パラメータ、パラメータの真値は  $\theta^* = (\alpha_1^*, \alpha_2^*, \beta_1^*, \beta_2^*, \beta_3^*) = (0.3, 0.5, 3.0, 0.5, 2.0)$ 、パラメータ空間は  $[0.1, 50]^5$  である。

$p = 4$  すなわち  $l_0 = 1, m_0 = 1$  とする。バランス条件は  $nh_n^4 \rightarrow 0$  となることに注意する。 $\hat{\theta}_{B,III} = (\hat{\alpha}_{III}^{(1)}, \hat{\beta}_{III}^{(1)}) := (\hat{\alpha}_{III,1}^{(1)}, \hat{\alpha}_{III,2}^{(1)}, \hat{\beta}_{III,1}^{(1)}, \hat{\beta}_{III,2}^{(1)}, \hat{\beta}_{III,3}^{(1)})$  は、ベイズ型推定量を初期推定量としたタイプ III のマルチステップ推定量で、次のように表される。

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_{III}^{(0)} &= \frac{\int_{\Theta_1} \alpha \exp \left\{ \frac{1}{n^{1-\frac{2}{p}}} U_n^{(0)}(\alpha) \right\} \pi_1(\alpha) d\alpha}{\int_{\Theta_1} \exp \left\{ \frac{1}{n^{1-\frac{2}{p}}} U_n^{(0)}(\alpha) \right\} \pi_1(\alpha) d\alpha} \quad (\text{初期ベイズ型推定量}), \\ \hat{\beta}_{III}^{(0)} &= \frac{\int_{\Theta_2} \beta \exp \left\{ \frac{1}{n^{1-\frac{2}{p-1}}} U_n^{(1)}(\hat{\alpha}_{III}^{(0)}, \beta) \right\} \pi_2(\beta) d\beta}{\int_{\Theta_2} \exp \left\{ \frac{1}{n^{1-\frac{2}{p-1}}} U_n^{(1)}(\hat{\alpha}_{III}^{(0)}, \beta) \right\} \pi_2(\beta) d\beta} \quad (\text{初期ベイズ型推定量}), \\ \hat{\alpha}_{III}^{(1)} &= \hat{\alpha}_{III}^{(0)} - \Gamma_{3,n,III}^{-1}(\hat{\alpha}_{III}^{(0)}, \hat{\beta}_{III}^{(0)}) \frac{1}{n} \partial_\alpha V_{3,n}(\hat{\alpha}_{III}^{(0)} | \hat{\alpha}_{III}^{(0)}, \hat{\beta}_{III}^{(0)}), \\ \hat{\beta}_{III}^{(1)} &= \hat{\beta}_{III}^{(0)} - \Xi_{4,n,III}^{-1}(\hat{\alpha}_{III}^{(1)}, \hat{\beta}_{III}^{(0)}) \frac{1}{nh_n} \partial_\beta V_{4,n}(\hat{\beta}_{III}^{(0)} | \hat{\alpha}_{III}^{(1)}, \hat{\beta}_{III}^{(0)}). \end{aligned}$$

$\hat{\theta}_{M,III} = (\tilde{\alpha}_{III}^{(1)}, \tilde{\beta}_{III}^{(1)}) := (\tilde{\alpha}_{III,1}^{(1)}, \tilde{\alpha}_{III,2}^{(1)}, \tilde{\beta}_{III,1}^{(1)}, \tilde{\beta}_{III,2}^{(1)}, \tilde{\beta}_{III,3}^{(1)})$  は、最尤型推定量を初期推定量としたタイプ III のマルチステップ推定量で、次のように表される。

$$\begin{aligned} U_n^{(0)}(\tilde{\alpha}_{III}^{(0)}) &= \sup_{\alpha \in \Theta_1} U_n^{(0)}(\alpha) \quad (\text{初期最尤型推定量}), \\ U_n^{(1)}(\tilde{\alpha}_{III}^{(0)}, \tilde{\beta}_{III}^{(0)}) &= \sup_{\beta \in \Theta_2} U_n^{(1)}(\tilde{\alpha}_{III}^{(0)}, \beta) \quad (\text{初期最尤型推定量}), \\ \tilde{\alpha}_{III}^{(1)} &= \tilde{\alpha}_{III}^{(0)} - \Gamma_{3,n,III}^{-1}(\tilde{\alpha}_{III}^{(0)}, \tilde{\beta}_{III}^{(0)}) \frac{1}{n} \partial_\alpha V_{3,n}(\tilde{\alpha}_{III}^{(0)} | \tilde{\alpha}_{III}^{(0)}, \tilde{\beta}_{III}^{(0)}), \\ \tilde{\beta}_{III}^{(1)} &= \tilde{\beta}_{III}^{(0)} - \Xi_{4,n,III}^{-1}(\tilde{\alpha}_{III}^{(1)}, \tilde{\beta}_{III}^{(0)}) \frac{1}{nh_n} \partial_\beta V_{4,n}(\tilde{\beta}_{III}^{(0)} | \tilde{\alpha}_{III}^{(1)}, \tilde{\beta}_{III}^{(0)}). \end{aligned}$$

$\hat{\theta}_{A,III} = (\tilde{\alpha}_{III}^{(1)}, \tilde{\beta}_{III}^{(1)}) := (\tilde{\alpha}_{III,1}^{(1)}, \tilde{\alpha}_{III,2}^{(1)}, \tilde{\beta}_{III,1}^{(1)}, \tilde{\beta}_{III,2}^{(1)}, \tilde{\beta}_{III,3}^{(1)})$  は、タイプ III の適応的最尤型推定量で、次のように表される。

$$U_n^{(0)}(\tilde{\alpha}_{III}^{(0)}) = \sup_{\alpha \in \Theta_1} U_n^{(0)}(\alpha) \quad (\text{初期最尤型推定量}),$$

表 1. 推定量の平均(上段)と標準偏差(下段)  $T = 250, h = 1/390, p = 4$ .

	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\alpha_1$	$\alpha_2$
真値	3.0	0.5	2.0	0.3	0.5
$\hat{\theta}_{B,III}$	3.06545 (0.70126)	0.51941 (0.09644)	2.04012 (0.77021)	0.29996 (0.00096)	0.49760 (0.00488)
$\hat{\theta}_{M,III}$	2.97984 (0.79250)	0.51040 (0.10396)	1.95829 (0.86374)	0.30001 (0.00101)	0.49994 (0.00457)
$\hat{\theta}_{A,III}$	2.97497 (0.80149)	0.50987 (0.10452)	1.95348 (0.87185)	0.30002 (0.00101)	0.49998 (0.00457)

$$U_n^{(1)}(\tilde{\alpha}_{III}^{(0)}, \tilde{\beta}_{III}^{(0)}) = \sup_{\beta \in \Theta_2} U_n^{(1)}(\tilde{\alpha}_{III}^{(0)}, \beta) \quad (\text{初期最尤型推定量}),$$

$$V_{3,n}(\tilde{\alpha}_{III}^{(1)} | \tilde{\alpha}_{III}^{(0)}, \tilde{\beta}_{III}^{(0)}) = \sup_{\alpha \in \Theta_1} V_{3,n}(\alpha | \tilde{\alpha}_{III}^{(0)}, \tilde{\beta}_{III}^{(0)}),$$

$$V_{4,n}(\tilde{\beta}_{III}^{(1)} | \tilde{\alpha}_{III}^{(1)}, \tilde{\beta}_{III}^{(0)}) = \sup_{\beta \in \Theta_2} V_{4,n}(\beta | \tilde{\alpha}_{III}^{(1)}, \tilde{\beta}_{III}^{(0)}).$$

初期推定量をベイズ型推定量としたタイプ III のマルチステップ推定量  $\hat{\theta}_{B,III}^{(1)}$ , 初期推定量を最尤型推定量としたタイプ III のマルチステップ推定量  $\hat{\theta}_{M,III}^{(1)}$ , そして, タイプ III の適応的最尤型推定量  $\hat{\theta}_{A,III}^{(1)}$  の漸近挙動を検証する. シミュレーションでは,  $T = 250$ ,  $h_n = 1/390$  (1 年の取引日数が 250 日で 1 日の取引時間が 390 分) と設定し, 真のモデルから 1000 本の独立なサンプルパスを発生させた. 実行には R (R Development Core Team 2013) のパッケージ Yuima (Brouste et al., 2014) と組み関数 `optim()` を用い, 初期ベイズ型推定量の計算のために Kamatani (2014) が提案したマルコフ連鎖モンテカルロ (MCMC) 法のアルゴリズムを用いた.

MCMC 法におけるバーンイン回数  $B_i$  は  $10^3$  とし, マルコフチェーンの生成数  $M$  を  $10^4$  とした. 推定値の平均と標準偏差を表 1 に示す.

初期最尤型推定量とタイプ III の適応的最尤型推定量は `optim()` を用いて計算した. その際に必要となる初期値は, 真値に近いものを選び,  $\bar{\theta} = (\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2, \bar{\beta}_3) = (0.5, 1.0, 4.0, 1.0, 2.0)$  とした.

3 つの推定量はすべて, 理論上は定理 1 と同等の漸近的性質をもつが, 数値計算上では違いが生じる. まず,  $\hat{\theta}_{B,III}$  および  $\hat{\theta}_{M,III}$  の計算は, 関数  $V_{3,n}$  および  $V_{4,n}$  の最適化を必要としない. これは数値計算の上では魅力的である. ただし, 初期ベイズ推定量は MCMC 法により計算されるために  $\hat{\theta}_{B,III}$  の導出には時間を要する. 一方,  $\hat{\theta}_{M,III}$  と  $\hat{\theta}_{A,III}$  の計算に要した平均 CPU 時間は 9.772 秒と 14.802 秒にすぎない (PC Intel 2.8 GHz を使用). これはニュートン・ラフソン法および最適化 `optim()` が高速であることを意味する. 初期ベイズ型推定量は正規化項  $n^{1-\frac{2}{p}}$ ,  $(nh_n)^{1-\frac{2}{p-1}}$  により頑健である. 正規化項はモンテカルロの用語では温度と言われており, 計算速度を上げるために使われる. (Robert and Casella, 2004 を参照). これは, 純粋な理論的結果とモンテカルロシミュレーション技法の興味深い関係を表していると言える.

表 1 の結果が示すように, 3 種類の推定量には著しい違いは見られないが, これは, 最適化のための初期値を真値に近いものにしたためである.  $\hat{\theta}_{M,III}$  と  $\hat{\theta}_{A,III}$  に使われる初期最尤型推定量の導出には, 最適化が必要になるのでそれに伴い初期値の選択が要求される. 一方, ベイズ型推定量の計算は初期値の影響を受けづらいので, 最適化が困難な場合には  $\hat{\theta}_{B,III}$  の方が好ましいと言える. 初期値の効果を示すため, 次の拡散過程を考える.

$$(2.4) \quad dX_t = (\beta_1 - \beta_2 X_t - 2 \sin(\beta_3 X_t)) dt + \frac{\alpha_2 + X_t^2}{1 + \alpha_1 X_t^2} dw_t, \quad X_0 = 2,$$

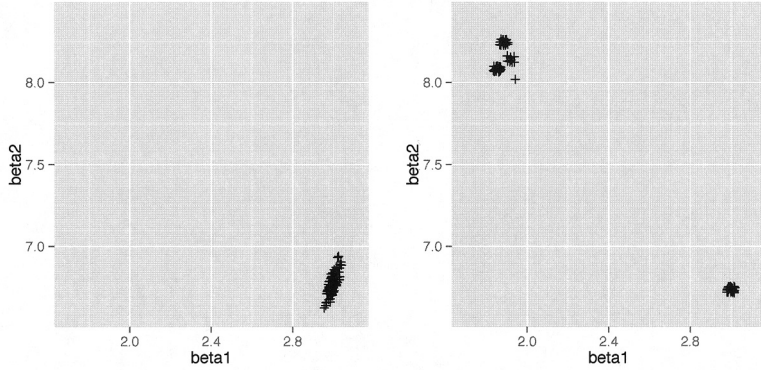


図 1.  $\beta_1, \beta_2$  の初期ベイズ型推定量(左)と初期最尤型推定量(右). 異なる初期値を用い, 最適化には `optim()` を使用した. 右図には 5 つのクラスターがあり, 下から上に向かってそれぞれ 36, 1, 32, 11, 20 の点が集まっている. 真値は  $(\beta_1, \beta_2) = (3.0, 7.0)$  で, 下の方にあるクラスターは真値に近いところに出てきている. 描画の重なりを避けるために, `ggplot2` の関数 `position_jitter(w=0.02, h=0.02)` を用いて実際の値の周囲に点を分散させている.

ここで,  $\theta = (\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$  の真値は,  $\theta^* = (\alpha_1^*, \alpha_2^*, \beta_1^*, \beta_2^*, \beta_3^*) = (0.3, 0.5, 3.0, 7.0, 5.0)$  である.  $T, h, p$  およびパラメータ空間は前述のモデルと同じとする. 図 1 は一回の実験で得られた  $\beta_1$  (横軸),  $\beta_2$  (縦軸) の推定値の散布図である. 左図は初期ベイズ型推定量, 右図は初期最尤型推定量である. いずれもパラメータ空間から一様に選択された 100 個の異なる初期値から計算されている. MCMC 法においてはバーンイン  $10^4$  回, 反復  $10^5$  回とした. 右図の左上隅の 4 つのクラスターには 64% の点が存在しており局所最大になっている. 左図では真値の近傍でただ一つのクラスターが存在するのみである.

この初期ベイズ型推定量と初期最尤型推定量を用いて,  $\hat{\theta}_{B,III}, \hat{\theta}_{M,III}, \hat{\theta}_{A,III}$  を計算する(図 2).  $\hat{\theta}_{A,III}$  (左下) は約 50% の点が真値の近くに集まっている.  $\hat{\theta}_{A,III}$  は  $\hat{\theta}_{M,III}$  (右上) よりも安定しており,  $\hat{\theta}_{B,III}$  (左上) は最も安定していることが分かる.

### 3. 非エルゴード的拡散過程

本節は, 非エルゴード的拡散過程を含む一般の確率回帰モデルのボラティリティパラメータのハイブリッドマルチステップ推定量の構成およびその漸近的性質について解説する. 詳細は, Kamatani et al. (2016) を参照.

#### 3.1 モデルと仮定

次の確率積分方程式で表される確率回帰モデルのボラティリティのパラメータ推定を考える.

$$(3.1) \quad Y_t = Y_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma(X_s, \theta) dw_s, \quad t \in [0, T].$$

ここで  $w$  は確率空間  $(\Omega, \mathcal{F}, (F_t)_{t \in [0, T]}, P)$  上の  $r$  次元標準ウィーナー過程,  $b, X$  はそれぞれ  $\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^d$  上の値をとる発展的的可測過程,  $Y_0$  は  $\mathbb{R}^m$ -値の初期状態,  $\sigma$  は  $\mathbb{R}^d \times \Theta$  上で定義される  $\mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^r$  値関数,  $\theta^*$  を  $\theta$  の真値とする.  $\Theta$  は局所リプシッツ境界をもつ  $\mathbb{R}^p$  での有界領域とする.  $\mathcal{F}$ -安定分布収束は  $\rightarrow_{d_s(\mathcal{F})}$  と表記する.  $\mathcal{F}$ -安定分布収束については, Jacod and Shiryaev (2003) の

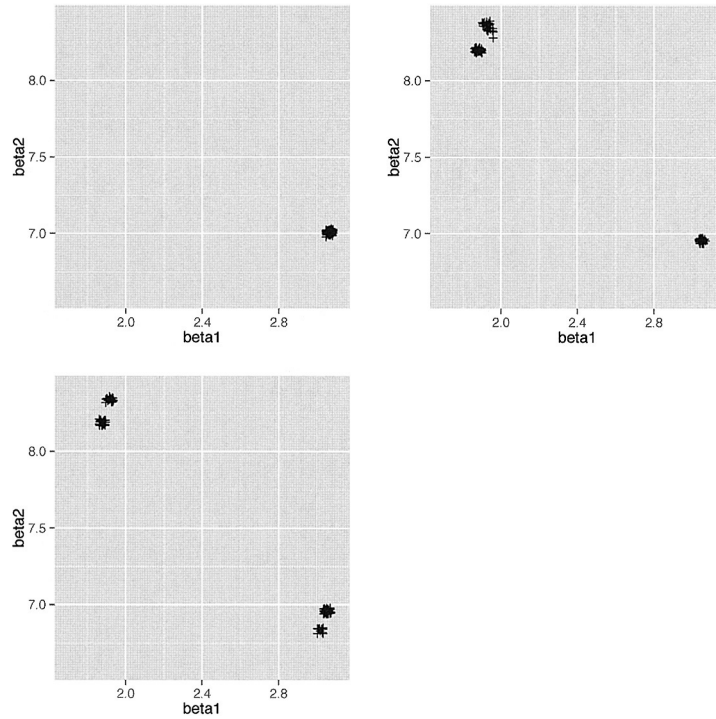


図 2.  $\beta_1, \beta_2$  の 3 つの推定量,  $\hat{\theta}_{B,III}$  (左上),  $\hat{\theta}_{M,III}$  (右上),  $\hat{\theta}_{A,III}$  (下) の散布図. 図 1 に示した初期ベイズ型推定量と初期最尤型推定量を用いている. 右上図には下から上に向かってそれぞれ 36, 32, 32 の点が集まった 3 つのクラスターがあり, 下図には 12, 36, 32, 20 個の点が集まった 4 つのクラスターがある. 実際の値の周囲に点を描画させている.

VIII 章を参照.  $S(x, \theta) = \sigma(x, \theta)^{\otimes 2}$ ,  $\Delta_k Y = Y_{t_k} - Y_{t_{k-1}}$  とおく.  $\sigma$  は  $\mathbb{R}^d \times \bar{\Theta}$  上の連続関数に拡張可能とし, それを  $\sigma$  と表記する.  $f \in L^p(P)$  と  $p > 1$  に対し,  $\|f\|_p = (E[|f|^p])^{1/p}$  とする. データ  $\mathbf{Z}_n = (X_{t_k}, Y_{t_k})_{0 \leq k \leq n}$ ,  $t_k = kh$ ,  $h = h_n = T/n$  は離散観測される.  $b$  は未知であることに注意する. 極限は  $n \rightarrow \infty$  を考える. すなわち  $\mathbf{Z}_n$  は高頻度データである.

離散観測に基づく非エルゴード的拡散型確率過程モデルによる統計推測は多くの研究者によって発展してきている. 例えば, Dohnal (1987), Florens-Zmirou (1989), Genon-Catalot and Jacod (1993, 1994), Gobet (2001) を参照. Uchida and Yoshida (2013) は確率回帰モデルの最尤型推定量もベイズ型推定量も漸近混合正規性とモーメント収束をもつことを示した. しかし, 最尤型推定量の導出は数値最適化を必要とし, 適切な初期値の選択が重要であり, ベイズ型推定量の計算には多大な時間を要する. 先述した通り, ワンステップ推定量は非常に有効であるが,  $\sqrt{n}$ -一致性をもつ初期推定量を見つけることは容易ではないため, 非エルゴード的拡散過程のワンステップ推定量の導出は困難になる.

本節では, 先述した Kamatani and Uchida (2015) の手法に基づいて, 初期ベイズ型推定量を用いた確率回帰モデルのハイブリッドマルチステップ推定量を提案し, マルチステップ推定量が漸近混合正規性とモーメント収束性をもつことを示す.

次を仮定する.

[C1] (i) すべての  $p > 1$  に対して,  $\sup_{0 \leq t \leq T} \|b_t\|_p < \infty$ .

(ii)  $\inf_{x, \theta} \det S(x, \theta) > 0$ ,  $\sigma \in C_{\uparrow}^{2,4}(\mathbb{R}^d \times \Theta; \mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^r)$ .

[C2]  $X$  は次のように表される:

$$X_t = X_0 + \int_0^t \tilde{b}_s ds + \int_0^t a_s dw_s + \int_0^t \tilde{a}_s d\tilde{w}_s.$$

ここで,  $\tilde{b}$ ,  $a$ ,  $\tilde{a}$  は, それぞれ  $\mathbb{R}^d$ ,  $\mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^r$ ,  $\mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^{r_1}$ -値の発展的可測過程で, すべての  $p > 1$  に対して

$$\|X_0\|_p + \sup_{t \in [0, T]} (\|\tilde{b}_t\|_p + \|a_t\|_p + \|\tilde{a}_t\|_p) < \infty$$

を満たす.  $\tilde{w}$  は  $w$  と独立な  $r_1$  次元ウィーナー過程である.

疑似対数尤度関数  $\mathbb{H}_n(\theta)$  は

$$\mathbb{H}_n(\theta) = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \{\log \det S(X_{t_{k-1}}, \theta) + h^{-1} S^{-1}(X_{t_{k-1}}, \theta) [(\Delta_k Y)^{\otimes 2}]\}$$

で与えられる.  $\mathbb{Y}_n(\theta) = \frac{1}{n} \{\mathbb{H}_n(\theta) - \mathbb{H}_n(\theta^*)\}$  とおくと, 仮定 [C1] [C2] の下で,  $\theta \in \Theta$  について一様に,

$$\mathbb{Y}(\theta) = -\frac{1}{2T} \int_0^T \left\{ \log \left( \frac{\det S(X_t, \theta)}{\det S(X_t, \theta^*)} \right) + \text{tr}(S^{-1}(X_t, \theta) S(X_t, \theta^*) - I_d) \right\} dt$$

へ確率収束する.

$$\chi_0 = \inf_{\theta \neq \theta^*} \frac{-\mathbb{Y}(\theta)}{|\theta - \theta^*|^2}$$

とおく. 次はインデックス  $\chi_0$  の非退化性に関する条件である.

[C3] すべての  $L > 0$  に対して,  $c_L > 0$  が存在して, すべての  $r > 0$  に対し,  $P[\chi_0 \leq r^{-1}] \leq \frac{c_L}{r^L}$  が成り立つ.

[C3] は  $1/\chi_0$  がすべてのオーダーで有限なモーメントをもつことと同等であることに注意する.

[C3] の十分条件については Uchida and Yoshida (2013) を参照.

### 3.2 ハイブリッドマルチステップ推定量

初期推定量についての仮定をおく.

[D]  $q \in (0, 1/2]$  とする.  $\theta$  の初期推定量  $\hat{\theta}_n^{(0)}$  は  $n \rightarrow \infty$  のとき, すべての  $M_1 > 0$  に対し,

$$\sup_n E_{\theta^*} [|n^q (\hat{\theta}_n^{(0)} - \theta^*)|^{M_1}] < \infty$$

を満たす.

[D] を満たす初期推定量は次のように求められる.  $q \in (0, 1/2]$  とする. 事前分布  $\pi: \Theta \rightarrow \mathbb{R}_+$  に対する初期ベイズ型推定量  $\tilde{\theta}_{q,n}^{(0)}$  は

$$\tilde{\theta}_{q,n}^{(0)} = \frac{\int_{\Theta} \theta \exp \left\{ \frac{1}{n^{1-2q}} \mathbb{H}_n(\theta) \right\} \pi(\theta) d\theta}{\int_{\Theta} \exp \left\{ \frac{1}{n^{1-2q}} \mathbb{H}_n(\theta) \right\} \pi(\theta) d\theta}$$

で定義される.  $\pi$  は連続で  $0 < \inf_{\theta \in \Theta} \pi(\theta) \leq \sup_{\theta \in \Theta} \pi(\theta) < \infty$  であるとする.

$q = 0.5$  の場合が通常のベイズ型推定量である． $q < 0.5$  のときのベイズ型推定量を初期推定量としたマルチステップ推定量の方が通常のベイズ型推定量や通常のベイズ型推定量を初期推定量としたマルチステップ推定量よりもパフォーマンスが良くなる数値シミュレーションの結果を 3.3 節で述べる．

$\mathbb{U}_{q,n} = \{u \in \mathbb{R}^p ; \theta^* + \frac{1}{n^q}u \in \Theta\}$ ,  $\mathbb{V}_{q,n}(r) = \{u \in \mathbb{U}_{q,n} ; r \leq |u|\}$  とおく． $\mathbb{U}_{q,n}$  上の統計的確率場  $\mathbb{Z}_{q,n}$  を

$$(3.2) \quad \mathbb{Z}_{q,n}(u) = \exp \left\{ \frac{1}{n^{1-2q}} \mathbb{H}_n \left( \theta^* + \frac{1}{n^q} u \right) - \frac{1}{n^{1-2q}} \mathbb{H}_n(\theta^*) \right\}$$

と定義する．

**命題 3.** (Uchida and Yoshida, 2013)  $q \in (0, 1/2]$  とする．[C1], [C2], [C3] を仮定する．このとき，すべての  $L > 0$  に対して，正定数  $C_L$  が存在して，すべての  $r > 0, n \in \mathbf{N}$  について

$$P \left[ \sup_{u \in \mathbb{V}_{q,n}(r)} \mathbb{Z}_{q,n}(u) \geq e^{-r} \right] \leq \frac{C_L}{r^L}$$

が成り立つ．

**命題 4.** (Kamatani et al., 2016)  $q \in (0, 1/2]$  とおく．[C1], [C2], [C3] を仮定する．このとき， $n \rightarrow \infty$  の下で，すべての  $M > 0$  に対して，

$$\sup_n E_{\theta^*} [ |n^q (\tilde{\theta}_{q,n}^{(0)} - \theta^*)|^M ] < \infty.$$

マルチステップ推定量について考察する．

$$\begin{aligned} \Gamma_n(\theta) &:= \frac{1}{n} \partial_\theta^2 \mathbb{H}_n(\theta), \\ K_n(\theta) &:= \{ \Gamma_n(\theta) \text{ は正則} \}, \\ \bar{\Gamma}_n(\theta) &:= \Gamma_n(\theta) 1_{K_n(\theta)} + E_p 1_{K_n^c(\theta)}, \end{aligned}$$

とおく．ここで  $E_p$  は  $p$  次単位行列である．

$q \in (0, 1/2]$  に対し， $J = \lceil -\log_2 q \rceil$  とおく．マルチステップ推定量  $\hat{\theta}_n^{(J)}$  は， $k = 1, \dots, J$  に対し

$$\hat{\theta}_n^{(k)} = \hat{\theta}_n^{(k-1)} - \bar{\Gamma}_n^{-1}(\hat{\theta}_n^{(k-1)}) \frac{1}{n} \partial_\theta \mathbb{H}_n(\hat{\theta}_n^{(k-1)})$$

で定義される．

**補題 2.** (Kamatani et al., 2016)  $q \in (0, 1/2]$ ,  $J = \lceil -\log_2 q \rceil$  とおく．[C1], [C2], [C3], [D] を仮定する．このとき， $k = 0, 1, \dots, J-1$  に対し，すべての  $M > 0$  について

$$\sup_n E_{\theta^*} [ |n^{2^k q} (\hat{\theta}_n^{(k)} - \theta^*)|^M ] < \infty$$

が成り立つ．

$\Gamma(\theta^*) = (\Gamma^{ij}(\theta^*))_{i,j=1,\dots,p}$ ，ただし

$$\Gamma^{ij}(\theta^*) = \frac{1}{2T} \int_0^T \text{tr}((\partial_{\theta_i} S) S^{-1} (\partial_{\theta_j} S) S^{-1} (X_t, \theta^*)) dt$$

とし， $\zeta$  は  $\Gamma(\theta^*)$  とは独立な  $p$  次元標準正規確率変数とする．

**定理 2.** (Kamatani et al., 2016)  $q \in (0, 1/2]$ ,  $J = \lceil -\log_2 q \rceil$  とおく．[C1], [C2], [C3], [D] を仮



定する．このとき， $n \rightarrow \infty$  の下，

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n^{(J)} - \theta^*) \rightarrow^{d_s(\mathcal{F})} \Gamma(\theta^*)^{-1/2} \zeta$$

が成り立つ．さらに，高々多項式増大のすべての連続関数  $f$  に対して，

$$E[f(\sqrt{n}(\hat{\theta}_n^{(J)} - \theta^*))] \rightarrow \mathbb{E}[f(\Gamma(\theta^*)^{-1/2} \zeta)]$$

が成り立つ．

### 3.3 例とシミュレーション結果

次式で定義される 1 次元拡散過程を考える．

$$\begin{cases} dX_t = -(X_t - 1)dt + [\theta_1 + \theta_2\{1 + \sin(\theta_3 X_t)\}]dw_t, & t \in [0, 1], \\ X_0 = 1. \end{cases}$$

ここで，真値は  $\theta^* = (1, 4, 8)$  とし，パラメータ空間は  $\Theta = [0.01, 20] \times [0, 20] \times [0, 20]$  であるとする．データ  $(X_{t_i})_{i=0,1,\dots,n}$  は  $t_i = ih$ ,  $h = 1/10^4$ ,  $t_n = nh = T = 1$ , サンプル数  $n$  は  $10^4$  とする．ここでは，最尤型推定量  $\hat{\theta}_{M,n}$  (Genon-Catalot and Jacod, 1993)，ベイズ型推定量  $\hat{\theta}_{B,n}$  (Uchida and Yoshida, 2013)そして本節で提案されたハイブリッドマルチステップ (HMS) 推定量のシミュレーションを行う．最尤型推定量  $\hat{\theta}_{M,n}$  は

$$\mathbb{H}_n(\hat{\theta}_{M,n}) = \sup_{\theta \in \Theta} \mathbb{H}_n(\theta)$$

で定義され，一様分布を事前分布とするベイズ型推定量  $\hat{\theta}_{B,n}$  は

$$\hat{\theta}_{B,n} := \frac{\int_{\Theta} \theta \exp(\mathbb{H}_n(\theta)) d\theta}{\int_{\Theta} \exp(\mathbb{H}_n(\theta)) d\theta}$$

で定義される． $q \in (0, 1/2]$  とすると，一様事前分布に対する初期ベイズ型推定量  $\hat{\theta}_{q,n}^{(0)}$  は

$$\hat{\theta}_{q,n}^{(0)} = \frac{\int_{\Theta} \theta \exp\left\{\frac{1}{n^{1-2q}} \mathbb{H}_n(\theta)\right\} d\theta}{\int_{\Theta} \exp\left\{\frac{1}{n^{1-2q}} \mathbb{H}_n(\theta)\right\} d\theta}$$

で定義される． $\mathbb{H}_n(\theta)$  の最大化には，R 言語の組込み関数 `optim()` の L-BFGS-B 法を用いた．ベイズ型推定量は Kamatani (2014) が提案した MCMC 法のアルゴリズムを使用して計算した．

真のモデルから 1000 本の独立なサンプルパスを発生させ，推定値の平均および標準偏差を計算し，結果を表 2-4 に示す．表 2 は 2 つの異なる初期値から得られた最尤型推定量  $\hat{\theta}_{M,n}$  である．最尤型推定量は組込み関数 `optim()` を用いて導出した．真値を初期値としたものは良いパフォーマンスをするが， $\Theta$  上の一様分布から得られた初期値は真値から遠く離れた値をとり得るため，最適化に失敗している．

表 3 は一様事前分布を持つベイズ型推定量  $\hat{\theta}_{B,n}$  の結果である．マルコフチェーン生成数  $M$  を  $5 \times 10^4$ ,  $5 \times 10^5$ ,  $10^7$  とし，これに対するバーンイン回数  $Bi$  をそれぞれ  $5 \times 10^3$ ,  $5 \times 10^4$ ,  $10^6$  とした． $(M, Bi) = (10^7, 10^6)$  のとき，ベイズ型推定量は良いふるまいをしているが， $(M, Bi) = (5 \times 10^4, 5 \times 10^3)$ ,  $(5 \times 10^5, 5 \times 10^4)$  のときは，MCMC 法によって生成されるマルコフチェーンが定常分布に収束しきれていないため，ベイズ型推定量の計算に失敗している．

表 4 は  $M = 5 \times 10^4$ ,  $Bi = 5 \times 10^3$  の場合の，一様事前分布をもつベイズ型推定量  $\hat{\theta}_{q,n}^{(0)}$  と  $q = 0.5, 0.45, 0.4, \dots, 0.1, 0.05$ ,  $J = [-\log_2 q]$  の場合の HMS 推定量  $\hat{\theta}_{q,n}^{(J)}$  のシミュレーション結果である．すべての  $M > 0$  に対し  $\sup_n E_{\theta^*} [|\hat{\theta}_{q,n}^{(0)} - \theta^*|^M] < \infty$  となることに注意されたい．この例では，HMS 推定量の中で  $q = 0.2$  とした場合が一番良いことがわかる．理論的に最適な

表 2. 最尤型推定量  $n = 1 \times 10^4$ .

初期値	平均 (1, 4, 8)	標準偏差
真値	1.008, 4.078, 7.998	0.010, 0.102, 0.007
乱数	1.622, 1.487, 9.659	0.638, 1.622, 6.412

表 3. ベイズ型推定量  $n = 1 \times 10^4$ .

M (MCMC の生成数)	Bi (バーンイン)	平均 (1, 4, 8)	標準偏差
$5 \times 10^4$	$5 \times 10^3$	1.075, 3.445, 6.644	0.290, 1.242, 2.698
$5 \times 10^5$	$5 \times 10^4$	1.020, 3.812, 7.383	0.165, 0.812, 1.868
$1 \times 10^7$	$1 \times 10^6$	1.006, 4.066, 7.962	0.027, 0.152, 0.275

表 4. HMS 推定量  $n = 1 \times 10^4$ ,  $M = 5 \times 10^4$ ,  $Bi = 5 \times 10^3$ .

$q$	$J$	初期ベイズ型推定量: 平均 (1, 4, 8), (標準偏差) HMS 推定量: 平均 (1, 4, 8), (標準偏差)
0.5	1	1.075, 3.445, 6.644 (0.290, 1.242, 2.698) 1.077, 3.673, 6.637 (0.305, 2.034, 2.710)
0.45	1	1.074, 3.552, 6.876 (0.278, 1.163, 2.429) 1.069, 3.774, 6.877 (0.286, 1.841, 2.438)
0.4	1	1.073, 3.599, 7.005 (0.248, 1.113, 2.298) 1.060, 3.902, 7.001 (0.275, 2.042, 2.324)
0.35	1	1.050, 3.747, 7.270 (0.187, 0.954, 1.977) 1.041, 3.933, 7.260 (0.200, 1.710, 2.005)
0.3	1	1.029, 3.993, 7.712 (0.095, 0.562, 1.149) 1.012, 4.194, 7.713 (0.122, 1.575, 1.163)
0.25	2	1.033, 4.208, 7.951 (0.033, 0.268, 0.309) 1.009, 4.135, 7.956 (0.058, 0.774, 0.321)
0.2	2	1.064, 4.488, 7.998 (0.021, 0.250, 0.026) 1.008, 4.058, 7.999 (0.012, 0.157, 0.024)
0.15	2	1.196, 5.072, 8.085 (0.039, 0.497, 0.186) 1.014, 4.166, 8.060 (0.159, 1.845, 0.237)
0.1	3	1.933, 4.587, 8.978 (0.146, 0.729, 0.476) 2.109, 7.799, 9.111 (0.920, 4.439, 0.721)
0.05	4	4.748, 5.968, 9.830 (0.253, 0.323, 0.390) 11.680, 8.632, 9.746 (4.544, 3.355, 0.599)

$q$  を選び出すことは困難であるが、実際には  $q$  を様々な値に変えて、競合する HMS 推定量の中から最も良い推定量を得ることができる。最も良い推定量  $\hat{\theta}_n^*$  とは  $\mathbb{H}_n(\hat{\theta}_n^*) = \max_{q \in K} \mathbb{H}_n(\hat{\theta}_{q,n}^{(J)})$  を満たすものであり、 $K$  は  $q$  の値の組 (例えば  $K = \{0.05, 0.1, 0.15, \dots, 0.5\}$ ) である。

次に、推定量を得るために要した計算時間に焦点をあてる。シミュレーションに使用したパソコンのスペックは、Intel i7 4930K (3.4 GHz base clock/3.9 GHz Turbo, 12 MB cache) である。最尤型推定量  $\hat{\theta}_{M,n}$ 、ベイズ型推定量  $\hat{\theta}_{B,n}$ 、HMS 推定量  $\hat{\theta}_{0.2,n}^{(J)}$  の計算時間はそれぞれ 0.9 秒、1733 秒、1667 秒であった。 $\hat{\theta}_{M,n}$  は  $\Theta$  上の一様分布からの乱数を初期値とした。 $\hat{\theta}_{B,n}$  は一様分布を事前分布、 $M = 5 \times 10^4$  とした。 $\hat{\theta}_{0.2,n}^{(J)}$  は、 $q = 0.2$ 、一様事前分布、 $M = 5 \times 10^4$  とした初期ベ

イズ型推定量  $\hat{\theta}_{q,n}^{(0)}$  を用いて計算した。事前分布を一様分布とし、 $M = 5 \times 10^5$  とした場合のベイズ型推定量  $\hat{\theta}_{B,n}$  の平均計算時間は 281 分である。事前分布を一様分布とし、 $M = 5 \times 10^4$  とした場合の初期ベイズ型推定量に基づいた HMS 推定量は、計算時間に関してはほとんど違いがみられない。 $q$  を変えた結果を表 4 に示す。数値計算上の見地から、短時間で推定値を得ることは極めて重要であるが、正確な推定値を得ることの方がより重要である。この意味で、`optim()` を使って求める最尤型推定量と比較して、初期ベイズ型推定量を用いて HMS 推定量を得るには多くの時間を要するが、このモデルでは最尤型推定量より HMS 推定量の方が優れていると言える。

#### 4. 微小拡散過程

本節は、Nomura and Uchida (2016a, 2016b) の結果に従って、微小拡散過程のドリフトパラメータおよびボラティリティパラメータの適応的最尤型推定、適応的ベイズ型推定そしてハイブリッド推定について概説する。

##### 4.1 モデルと仮定

次の確率微分方程式で定義される  $d$  次元拡散過程を考える。

$$(4.1) \quad \begin{cases} dX_t = a(X_t, \alpha)dt + \epsilon b(X_t, \beta)dw_t, & t \in [0, T], \quad \epsilon \in (0, 1], \\ X_0 = x_0. \end{cases}$$

ここで、 $a: \mathbb{R}^d \times \Theta_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $b: \mathbb{R}^d \times \Theta_\beta \rightarrow \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^r$ ,  $w$  は  $r$  次元標準ウィーナー過程、 $\epsilon$  と  $T$  は既知な定数、 $x_0$  は確定的初期条件、 $\theta = (\alpha, \beta) \in \Theta = \Theta_\alpha \times \Theta_\beta$ ,  $\theta^* = (\alpha^*, \beta^*) \in \Theta$  は  $\theta$  の真値、 $\Theta_\alpha$ ,  $\Theta_\beta$  はそれぞれ  $\mathbb{R}^p$ ,  $\mathbb{R}^q$  上の有界で凸な開部分集合である。パラメータ空間は局所的リプシッツ境界をもつとする。本節の微小拡散過程のドリフト係数  $a$  とボラティリティ係数  $b$  は 2 節のエルゴード的拡散過程のドリフト係数  $b$  とボラティリティ係数  $a$  とは記号が異なっていることに注意する。データは離散観測され、 $\mathbb{X}_n = (X_{t_i})_{0 \leq i \leq n}$ ,  $t_i = ih_n$ ,  $h_n = T/n$  であるとする。 $\epsilon \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ ,  $\frac{1}{\epsilon\sqrt{n}} = O(1)$  の場合を考える。また、ある  $\gamma \in (0, 1]$  が存在して、 $\epsilon(\sqrt{n})^\gamma = O(1)$  を満たすとする。(4.1) で定義される拡散過程は、小さな摂動をもつダイナミカルシステムあるいは微小拡散過程と呼ばれている (Azencott, 1982; Freidlin and Wentzell, 1998; Yoshida, 1992a を参照)。微小拡散過程の数理ファイナンスや生命科学への応用については Yoshida (1992b), Kunitomo and Takahashi (2001), Takahashi and Yoshida (2004), Uchida and Yoshida (2004b), Fuchs (2013) とそれらの参考文献を参照。 $B(x, \beta) = bb^*(x, \beta)$ ,  $\Delta X_i = X_{t_i} - X_{t_{i-1}}$ ,  $a_{i-1}(\alpha) = a(X_{t_{i-1}}, \alpha)$ ,  $B_{i-1}(\beta) = B(X_{t_{i-1}}, \beta)$  とする。 $X_t^0$  を  $\epsilon = 0$  としたときの常微分方程式の解とする。すなわち  $dX_t^0 = a(X_t^0, \alpha^*)dt$ ,  $X_0^0 = x_0$  である。

連続観測される微小拡散過程の統計推測は著しく発展している。例えば、Kutoyants (1984, 1994), Yoshida (1992a, 1993, 2003), Prakasa Rao (1999), Iacus (2000), Iacus and Kutoyants (2001), Uchida and Yoshida (2004a) とそれらの参考文献を参照。離散観測された微小拡散過程については、最尤型推定量や  $M$  推定量に関する研究は数多く挙げられる (Genon-Catalot, 1990; Laredo, 1990; Sørensen, 2000, 2012; Sørensen and Uchida, 2003; Uchida, 2003, 2004, 2006, 2008; Gloter and Sørensen, 2009; Guy et al., 2014 など)。しかし、適応的推測やハイブリッド型推測の研究はほとんどない。

本節では、Nomura and Uchida (2016a, 2016b) で提案された適応的最尤型推定量、適応的ベイズ型推定量そしてハイブリッド推定量の漸近的性質 (漸近正規性とモーメント収束性) について説明する。

以下の仮定をおく.

[E1] (i) すべての  $x, y \in \mathbb{R}^d$  に対して

$$\sup_{\alpha \in \Theta_\alpha} |a(x, \alpha) - a(y, \alpha)| + \sup_{\beta \in \Theta_\beta} \|b(x, \beta) - b(y, \beta)\| \leq K|x - y|$$

となる  $K > 0$  が存在する.

(ii)  $\inf_{x, \beta} \det B(x, \beta) > 0$ .

[E2]  $a(x, \alpha) \in C_{\uparrow}^{6,4}(\mathbb{R}^d \times \Theta_\alpha; \mathbb{R}^d)$ ,  $b(x, \beta) \in C_{\uparrow}^{6,4}(\mathbb{R}^d \times \Theta_\beta; \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^r)$ .

次に,

$$\begin{aligned} \mathbb{Y}^{(1)}(\alpha) &= -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |a(X_t^0, \alpha) - a(X_t^0, \alpha^*)|^2 dt, \\ \mathbb{Y}^{(2)}(\beta) &= -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \left\{ \text{tr}[B(X_t^0, \beta)^{-1} B(X_t^0, \beta^*) - I_d] + \log \frac{\det B(X_t^0, \beta)}{\det B(X_t^0, \beta^*)} \right\} dt, \\ \mathbb{Y}^{(3)}(\alpha) &= -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} B(X_t^0, \beta^*)^{-1} [(a(X_t^0, \alpha) - a(X_t^0, \alpha^*))^{\otimes 2}] dt \end{aligned}$$

とおく.

[E3] すべての  $\alpha \in \Theta_\alpha$ ,  $\beta \in \Theta_\beta$  に対し

$$\begin{aligned} \mathbb{Y}^{(1)}(\alpha) &\leq -\chi^{(1)} |\alpha - \alpha^*|^2, \\ \mathbb{Y}^{(2)}(\beta) &\leq -\chi^{(2)} |\beta - \beta^*|^2, \\ \mathbb{Y}^{(3)}(\alpha) &\leq -\chi^{(3)} |\alpha - \alpha^*|^2 \end{aligned}$$

となる正定数  $\chi^{(1)}, \chi^{(2)}, \chi^{(3)}$  が存在する.

フィッシャー情報行列  $I(\theta^*)$  を

$$\begin{aligned} I(\theta^*) &= \begin{pmatrix} (I_a^{ij}(\theta^*))_{1 \leq i, j \leq p} & 0 \\ 0 & (I_b^{ij}(\beta^*))_{1 \leq i, j \leq q} \end{pmatrix}, \\ I_a^{ij}(\theta^*) &= \int_{\mathbb{R}^d} (\partial_{\alpha_i} a(X_t^0, \alpha^*))^* B(X_t^0, \beta^*) \partial_{\alpha_j} a(X_t^0, \alpha^*) dt, \\ I_b^{ij}(\beta^*) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \text{tr}\{B^{-1}(\partial_{\beta_i} B) B^{-1}(\partial_{\beta_j} B)(X_t^0, \beta^*)\} dt \end{aligned}$$

とおく.

#### 4.2 適応的推定量

疑似対数尤度関数  $U_{\epsilon, n}^{(1)}(\alpha)$ ,  $U_{\epsilon, n}^{(2)}(\alpha, \beta)$ ,  $U_{\epsilon, n}^{(3)}(\alpha, \beta)$  は次のように表される.

$$\begin{aligned} U_{\epsilon, n}^{(1)}(\alpha) &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n |\Delta X_i - h_n a_{i-1}(\alpha)|^2 (\epsilon^2 h_n)^{-1}, \\ U_{\epsilon, n}^{(2)}(\alpha, \beta) &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \{\log \det B_{i-1}(\beta) + (\epsilon^2 h_n)^{-1} B_{i-1}^{-1}(\beta) [(\Delta X_i - h_n a_{i-1}(\alpha))^{\otimes 2}]\}, \\ U_{\epsilon, n}^{(3)}(\alpha, \beta) &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\epsilon^2 h_n)^{-1} B_{i-1}^{-1}(\beta) [(\Delta X_i - h_n a_{i-1}(\alpha))^{\otimes 2}]. \end{aligned}$$

初期推定量  $\hat{\alpha}_{\epsilon,n}^{(1)}$  と適応的最尤型推定量  $\hat{\alpha}_{\epsilon,n}$  と  $\hat{\beta}_{\epsilon,n}$  は次で定義される.

$$\begin{aligned} U_{\epsilon,n}^{(1)}(\hat{\alpha}_{\epsilon,n}^{(1)}) &= \sup_{\alpha \in \Theta_\alpha} U_{\epsilon,n}^{(1)}(\alpha), \\ U_{\epsilon,n}^{(2)}(\hat{\alpha}_{\epsilon,n}^{(1)}, \hat{\beta}_{\epsilon,n}) &= \sup_{\beta \in \Theta_\beta} U_{\epsilon,n}^{(2)}(\hat{\alpha}_{\epsilon,n}^{(1)}, \beta), \\ U_{\epsilon,n}^{(3)}(\hat{\alpha}_{\epsilon,n}, \hat{\beta}_{\epsilon,n}) &= \sup_{\alpha \in \Theta_\alpha} U_{\epsilon,n}^{(3)}(\alpha, \hat{\beta}_{\epsilon,n}). \end{aligned}$$

**定理 3.** (Nomura and Uchida, 2016a) [E1], [E2], [E3] を仮定する. このとき,  $\frac{1}{\epsilon\sqrt{n}} = O(1)$  の下,

$$(\epsilon^{-1}(\hat{\alpha}_{\epsilon,n} - \alpha^*), \sqrt{n}(\hat{\beta}_{\epsilon,n} - \beta^*)) \xrightarrow{d} (\zeta_1, \zeta_2) \sim N_{p+q}(0, I(\theta^*)^{-1})$$

が成り立つ. さらに, 高々多項式増大のすべての連続関数  $f$  に対して,

$$E_{\theta^*}[f(\epsilon^{-1}(\hat{\alpha}_{\epsilon,n} - \alpha^*), \sqrt{n}(\hat{\beta}_{\epsilon,n} - \beta^*))] \rightarrow \mathbb{E}[f(\zeta_1, \zeta_2)]$$

が成り立つ.

事前分布  $\pi_1(\alpha)$ ,  $\pi_2(\beta)$  は連続で,  $0 < \inf_{\alpha \in \Theta_\alpha} \pi_1(\alpha) \leq \sup_{\alpha \in \Theta_\alpha} \pi_1(\alpha) < \infty$ ,  $0 < \inf_{\beta \in \Theta_\beta} \pi_2(\beta) \leq \sup_{\beta \in \Theta_\beta} \pi_2(\beta) < \infty$  を満たすと仮定する. 初期ベイズ型推定量  $\hat{\alpha}_{\epsilon,n}^{(1)}$  および適応的ベイズ型推定量  $\tilde{\alpha}_{\epsilon,n}$ ,  $\tilde{\beta}_{\epsilon,n}$  は次で定義される:

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_{\epsilon,n}^{(1)} &= \frac{\int_{\Theta_\alpha} \alpha \exp\{U_{\epsilon,n}^{(1)}(\alpha)\} \pi_1(\alpha) d\alpha}{\int_{\Theta_\alpha} \exp\{U_{\epsilon,n}^{(1)}(\alpha)\} \pi_1(\alpha) d\alpha}, \\ \tilde{\beta}_{\epsilon,n} &= \frac{\int_{\Theta_\beta} \beta \exp\{U_{\epsilon,n}^{(2)}(\tilde{\alpha}_{\epsilon,n}^{(1)}, \beta)\} \pi_2(\beta) d\beta}{\int_{\Theta_\beta} \exp\{U_{\epsilon,n}^{(2)}(\tilde{\alpha}_{\epsilon,n}^{(1)}, \beta)\} \pi_2(\beta) d\beta}, \\ \tilde{\alpha}_{\epsilon,n} &= \frac{\int_{\Theta_\alpha} \alpha \exp\{U_{\epsilon,n}^{(3)}(\alpha, \tilde{\beta}_{\epsilon,n})\} \pi_1(\alpha) d\alpha}{\int_{\Theta_\alpha} \exp\{U_{\epsilon,n}^{(3)}(\alpha, \tilde{\beta}_{\epsilon,n})\} \pi_1(\alpha) d\alpha}. \end{aligned}$$

**定理 4.** (Nomura and Uchida, 2016b) [E1], [E2], [E3] を仮定する. このとき,  $\frac{1}{\epsilon\sqrt{n}} = O(1)$  の下,

$$(\epsilon^{-1}(\tilde{\alpha}_{\epsilon,n} - \alpha^*), \sqrt{n}(\tilde{\beta}_{\epsilon,n} - \beta^*)) \xrightarrow{d} (\zeta_1, \zeta_2) \sim N_{p+q}(0, I(\theta^*)^{-1})$$

が成り立つ. さらに, 高々多項式増大のすべての連続関数  $f$  に対して,

$$E_{\theta^*}[f(\epsilon^{-1}(\tilde{\alpha}_{\epsilon,n} - \alpha^*), \sqrt{n}(\tilde{\beta}_{\epsilon,n} - \beta^*))] \rightarrow \mathbb{E}[f(\zeta_1, \zeta_2)]$$

が成り立つ.

次にハイブリッド推定量を定義する.  $r_1, r_2 \in (0, 1]$ ,  $r_2 \leq 2r_1\gamma$  とする.  $n \rightarrow \infty$ ,  $\epsilon \rightarrow 0$  のとき,  $\frac{1}{\epsilon\sqrt{n}} = O(1)$ ,  $\epsilon(\sqrt{n})^\gamma = O(1)$  であることに注意する.

$$\begin{aligned} \mathbb{H}_{\epsilon,n,r_1}^{(1)}(\alpha) &= \epsilon^{2-2r_1} U_{\epsilon,n}^{(1)}(\alpha), \\ \mathbb{H}_{\epsilon,n,r_2}^{(2)}(\alpha, \beta) &= \frac{1}{(\sqrt{n})^{2-2r_2}} U_{\epsilon,n}^{(2)}(\alpha, \beta) \end{aligned}$$

とする. 初期ベイズ型推定量  $\tilde{\alpha}_{\epsilon,n,r_1}^{(1)}$ ,  $\tilde{\beta}_{\epsilon,n,r_2}^{(2)}$  は

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_{\epsilon,n,r_1}^{(1)} &= \frac{\int_{\Theta_\alpha} \alpha \exp\{\mathbb{H}_{\epsilon,n,r_1}^{(1)}(\alpha)\} \pi_1(\alpha) d\alpha}{\int_{\Theta_\alpha} \exp\{\mathbb{H}_{\epsilon,n,r_1}^{(1)}(\alpha)\} \pi_1(\alpha) d\alpha}, \\ \tilde{\beta}_{\epsilon,n,r_2}^{(2)} &= \frac{\int_{\Theta_\beta} \beta \exp\{\mathbb{H}_{\epsilon,n,r_2}^{(2)}(\tilde{\alpha}_{\epsilon,n,r_1}^{(1)}, \beta)\} \pi_2(\beta) d\beta}{\int_{\Theta_\beta} \exp\{\mathbb{H}_{\epsilon,n,r_2}^{(2)}(\tilde{\alpha}_{\epsilon,n,r_1}^{(1)}, \beta)\} \pi_2(\beta) d\beta}\end{aligned}$$

により定義され、ハイブリッド推定量  $\tilde{\alpha}_{\epsilon,n}$ ,  $\tilde{\beta}_{\epsilon,n}$  は

$$\begin{aligned}U_{\epsilon,n}^{(3)}(\tilde{\alpha}_{\epsilon,n}, \tilde{\beta}_{\epsilon,n,r_2}^{(2)}) &= \sup_{\alpha \in \Theta_\alpha} U_{\epsilon,n}^{(3)}(\alpha, \tilde{\beta}_{\epsilon,n,r_2}^{(2)}), \\ U_{\epsilon,n}^{(2)}(\tilde{\alpha}_{\epsilon,n}, \tilde{\beta}_{\epsilon,n}) &= \sup_{\beta \in \Theta_\beta} U_{\epsilon,n}^{(2)}(\tilde{\alpha}_{\epsilon,n}, \beta)\end{aligned}$$

により定義される。

注 3.  $r_2 \leq 2r_1\gamma$  の条件は、 $\alpha$  に関する  $a(x, \alpha)$  の滑らかさによって緩和することが可能である。

命題 5. (Nomura and Uchida, 2016b)  $r_1, r_2 \in (0, 1]$  とする. [E1], [E2], [E3] を仮定する. このとき, すべての  $M > 0$  に対し, 次が成り立つ.

- (i)  $\sup_{\epsilon,n} E_{\theta^*} [|\epsilon^{-r_1}(\tilde{\alpha}_{\epsilon,n,r_1}^{(1)} - \alpha^*)|^M] < \infty.$
- (ii)  $\sup_{\epsilon,n} E_{\theta^*} [|\sqrt{n}(\tilde{\beta}_{\epsilon,n,r_2}^{(2)} - \beta^*)|^M] < \infty.$
- (iii)  $\sup_{\epsilon,n} E_{\theta^*} [|\epsilon^{-1}(\tilde{\alpha}_{\epsilon,n} - \alpha^*)|^M] < \infty.$
- (iv)  $\sup_{\epsilon,n} E_{\theta^*} [|\sqrt{n}(\tilde{\beta}_{\epsilon,n} - \beta^*)|^M] < \infty.$

定理 5. (Nomura and Uchida, 2016b) [E1], [E2], [E3] を仮定する. このとき,  $\frac{1}{\epsilon\sqrt{n}} = O(1)$  の下,

$$(\epsilon^{-1}(\tilde{\alpha}_{\epsilon,n} - \alpha^*), \sqrt{n}(\tilde{\beta}_{\epsilon,n} - \beta^*)) \xrightarrow{d} (\zeta_1, \zeta_2)$$

が成り立つ. さらに, 高々多項式増大のすべての連続関数  $f$  に対して,

$$E_{\theta^*} [f(\epsilon^{-1}(\tilde{\alpha}_{\epsilon,n} - \alpha^*), \sqrt{n}(\tilde{\beta}_{\epsilon,n} - \beta^*))] \rightarrow \mathbb{E}[f(\zeta_1, \zeta_2)]$$

が成り立つ.

注 4.  $r_1 < 1, r_2 = 1$  のとき, 高々多項式増大なすべての連続関数  $f$  に対し,

$$E_{\theta^*} [f(\epsilon^{-1}(\tilde{\alpha}_{\epsilon,n} - \alpha^*), \sqrt{n}(\tilde{\beta}_{\epsilon,n,r_2}^{(2)} - \beta^*))] \rightarrow \mathbb{E}[f(\zeta_1, \zeta_2)]$$

となる.

#### 4.3 例とシミュレーション結果

次式で与えられる 1 次元拡散過程を考える.

$$\begin{cases} dX_t^\epsilon = (\alpha_1 - \alpha_2 X_t^\epsilon - 2 \sin(\alpha_3 X_t^\epsilon)) dt + \epsilon \frac{\beta_2 + (X_t^\epsilon)^2}{1 + \beta_1 (X_t^\epsilon)^2} dw_t & t \in [0, 1], \quad \epsilon \in (0, 1], \\ X_0 = 2. \end{cases}$$

ここで,  $\theta = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2)$  は未知パラメータ, 真値は  $\theta^* = (\alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*, \beta_1^*, \beta_2^*) = (3, 7, 5, 0.5, 5)$ , パラメータ空間は  $\Theta = [0.01, 20]^5$  であるとする. データ  $(X_{t_i})$  は  $\epsilon = 0.01, 0.05, 0.1$ ,  $n = 100, 1000$  に対して発生させる. 定理 5 のハイブリッド推定量  $\tilde{\theta} = (\tilde{\alpha}_{\epsilon,n}, \tilde{\beta}_{\epsilon,n})$  と定理 3 の適応的最尤型推定量  $\hat{\theta} = (\hat{\alpha}_{\epsilon,n}, \hat{\beta}_{\epsilon,n})$  をシミュレーションにより検証する. 適応的最尤型推定量は,

表 5. 適応的最尤型推定量  $\hat{\theta}$  (初期値は真値).

$\epsilon$	$n$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$
		3.0	7.0	5.0	0.5	5.0
0.1	100	3.1522 (0.98947)	7.1602 (1.00240)	4.8413 (0.65782)	0.5835 (0.24111)	4.8717 (0.60907)
	1000	3.2158 (1.02660)	7.3645 (1.05284)	4.9263 (0.64899)	0.5060 (0.06575)	4.9793 (0.18120)
0.05	100	2.9804 (0.42147)	6.8725 (0.46175)	4.8843 (0.18826)	0.5633 (0.21750)	4.8352 (0.50216)
	1000	3.0204 (0.42371)	7.0451 (0.47758)	4.9827 (0.18772)	0.5046 (0.06437)	4.9779 (0.17050)
0.01	100	2.9587 (0.08148)	6.8171 (0.09088)	4.8928 (0.03566)	0.5212 (0.20404)	4.7987 (0.47476)
	1000	2.9935 (0.08183)	6.9818 (0.09426)	4.9893 (0.03540)	0.5042 (0.06365)	4.9774 (0.16647)

表 6. 初期ベイズ型推定量  $\tilde{\alpha}^{(1)}, \tilde{\beta}^{(2)}$  (初期値は真値).

$\epsilon$	$n$	$\tilde{\alpha}_1^{(1)}$	$\tilde{\alpha}_2^{(1)}$	$\tilde{\alpha}_3^{(1)}$	$\tilde{\beta}_1^{(2)}$	$\tilde{\beta}_2^{(2)}$
		3.0	7.0	5.0	0.5	5.0
0.1	100	3.1649 (1.20757)	7.1480 (1.11918)	4.7996 (1.48767)	0.6732 (0.29173)	5.1323 (0.76265)
	1000	3.2260 (1.24486)	7.3494 (1.17456)	4.8652 (1.42835)	0.5125 (0.06691)	5.0004 (0.18440)
0.05	100	2.9846 (0.43101)	6.8875 (0.47242)	4.8773 (0.24526)	0.6373 (0.23818)	5.0509 (0.54857)
	1000	3.0209 (0.43633)	7.0544 (0.49534)	4.9753 (0.19661)	0.5104 (0.06483)	4.9963 (0.17158)
0.01	100	2.9610 (0.08270)	6.8225 (0.09308)	4.8978 (0.03647)	0.5884 (0.21740)	4.9974 (0.50036)
	1000	2.9931 (0.08406)	6.9819 (0.09780)	4.9901 (0.03677)	0.5098 (0.06414)	4.9952 (0.16728)

$$\begin{aligned}
U_{\epsilon,n}^{(1)}(\hat{\alpha}_{\epsilon,n}^{(1)}) &= \sup_{\alpha \in \Theta_\alpha} U_{\epsilon,n}^{(1)}(\alpha), \\
U_{\epsilon,n}^{(2)}(\hat{\alpha}_{\epsilon,n}^{(1)}, \hat{\beta}_{\epsilon,n}) &= \sup_{\beta \in \Theta_\beta} U_{\epsilon,n}^{(2)}(\hat{\alpha}_{\epsilon,n}^{(1)}, \beta), \\
U_{\epsilon,n}^{(3)}(\hat{\alpha}_{\epsilon,n}, \hat{\beta}_{\epsilon,n}) &= \sup_{\alpha \in \Theta_\alpha} U_{\epsilon,n}^{(3)}(\alpha, \hat{\beta}_{\epsilon,n})
\end{aligned}$$

を満たすものである.

真のモデルから 1000 本の独立なサンプルパスを発生させ、各々の推定量の平均と標準偏差を計算する. 適応的最尤型推定量  $\hat{\theta}$  とハイブリッド推定量  $\tilde{\theta}$  は R 言語の組込み関数 `optim()` を使って計算し、初期ベイズ型推定量  $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$  は Kamatani (2014) が提案した MCMC 法のアルゴリズムを用いて計算される. マルコフチェーンの生成数は  $5 \times 10^4$  回、バーンイン回数は  $5 \times 10^3$  とする. 初期値  $(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0, \beta_1^0, \beta_2^0)$  には、真値あるいは  $\Theta$  上の一様乱数を用いる.

表 5–6 では真値、表 8–9 では一様乱数を初期値としている. 表 7 と表 10 は、初期ベイズ型推

表 7. ハイブリッド推定量  $\tilde{\theta}$  (初期値は初期ベイズ型推定量  $\tilde{\alpha}^{(1)}, \tilde{\beta}^{(2)}$ ).

$\epsilon$	$n$	$\tilde{\alpha}_1$	$\tilde{\alpha}_2$	$\tilde{\alpha}_3$	$\tilde{\beta}_1$	$\tilde{\beta}_2$
		3.0	7.0	5.0	0.5	5.0
0.1	100	3.1550 (1.19584)	7.1218 (1.10431)	4.8144 (1.53128)	0.6176 (0.27304)	4.9223 (0.66270)
	1000	3.2141 (1.17337)	7.3304 (1.11897)	4.8795 (1.45665)	0.5081 (0.06666)	4.9827 (0.18295)
0.05	100	2.9797 (0.42335)	6.8707 (0.46139)	4.8786 (0.24277)	0.5958 (0.23516)	4.8868 (0.52298)
	1000	3.0205 (0.42371)	7.0452 (0.47757)	4.9827 (0.18772)	0.5069 (0.06472)	4.9818 (0.17092)
0.01	100	2.9582 (0.08138)	6.8159 (0.09071)	4.8916 (0.03542)	0.5525 (0.22260)	4.8489 (0.49509)
	1000	2.9935 (0.08183)	6.9818 (0.09426)	4.9893 (0.03540)	0.5065 (0.06409)	4.9812 (0.16688)

表 8. 適応的最尤型推定量  $\hat{\theta}$  (初期値は乱数).

$\epsilon$	$n$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$
		3.0	7.0	5.0	0.5	5.0
0.1	100	2.6085 (1.37309)	6.5868 (1.26410)	9.3934 (5.99408)	0.5274 (0.21488)	4.9402 (0.53280)
	1000	2.7294 (1.43034)	6.8550 (1.26317)	9.3538 (6.00919)	0.5005 (0.06586)	4.9864 (0.18174)
0.05	100	2.0566 (0.85040)	5.8877 (1.01678)	9.2164 (5.18264)	0.3671 (0.28195)	5.1388 (0.70839)
	1000	2.2951 (1.00509)	6.3334 (1.13409)	9.0811 (5.91092)	0.4701 (0.24035)	4.9944 (0.56477)
0.01	100	2.0081 (0.98288)	5.7267 (1.12613)	8.4996 (5.28508)	0.2530 (0.29049)	10.4713 (5.67697)
	1000	1.9570 (1.06001)	5.7185 (1.29344)	8.7171 (5.27892)	0.2544 (0.24249)	5.6897 (0.76937)

定量  $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$  に対し  $r_1 = r_2 = 1$  としている. 表 11–12 では,  $\epsilon = 0.05, n = 1000$ , 初期ベイズ型推定量に対し  $r_1 = 0.1, 0.2, \dots, 1, r_2 = 1$  としている.

適応的最尤型推定量(表 5)とハイブリッド推定量(表 7)はほぼ同じ結果を示しており, いずれも  $\epsilon = 0.1$  のときに不安定となる. しかし表 8 に見られるように, 初期値に  $\Theta$  上の一様乱数を用いた場合, 適応的最尤型推定量は真値を用いた場合のようにうまく推定できていない. 一方, 初期ベイズ型推定量(表 9)とハイブリッド推定量(表 10)は初期値に  $\Theta$  上の一様乱数を用いたとしても良い結果を出している.

$\epsilon = 0.05, n = 1000$  としたときの推定量  $\tilde{\alpha}_3, \hat{\alpha}_3$  の標準偏差に着目すると, 表 6 と表 9 の  $\tilde{\alpha}_3$  の標準偏差に明らかな違いが生じており, 表 7 と表 10 の  $\tilde{\alpha}_3$  の標準偏差についても同様である. これは表 9 の初期ベイズ型推定量がパラメータ  $\alpha_3$  の推定に数回失敗していることに起因している. 表 10 からハイブリッド推定量は初期ベイズ型推定量の影響を受けていることがわかる. 一方, 表 11 の初期ベイズ型推定量  $\tilde{\alpha}_3$  の標準偏差は  $r_1 = 0.2$  または  $0.3$  のとき, 表 6 の値に近



表 9. 初期ベイズ型推定量  $\tilde{\alpha}^{(1)}$ ,  $\tilde{\beta}^{(2)}$  (初期値は乱数).

$\epsilon$	$n$	$\tilde{\alpha}_1^{(1)}$	$\tilde{\alpha}_2^{(1)}$	$\tilde{\alpha}_3^{(1)}$	$\tilde{\beta}_1^{(2)}$	$\tilde{\beta}_2^{(2)}$
		3.0	7.0	5.0	0.5	5.0
0.1	100	3.0860 (1.27922)	7.0710 (1.17129)	5.3797 (2.99609)	0.6693 (0.29384)	5.1246 (0.75495)
	1000	3.1539 (1.31686)	7.2856 (1.21481)	5.4848 (2.99470)	0.5123 (0.06677)	4.9996 (0.18449)
0.05	100	2.9674 (0.46493)	6.8703 (0.50537)	4.9606 (1.10689)	0.6348 (0.24042)	5.0523 (0.54990)
	1000	3.0052 (0.47404)	7.0380 (0.52699)	5.0437 (1.06207)	0.5100 (0.06509)	4.9965 (0.17177)
0.01	100	2.9565 (0.12124)	6.8174 (0.13517)	4.9236 (0.47845)	0.5877 (0.21938)	5.0364 (0.83245)
	1000	2.9869 (0.13426)	6.9748 (0.15316)	5.0244 (0.54853)	0.5081 (0.07048)	5.0015 (0.19432)

表 10. ハイブリッド推定量  $\tilde{\theta}$  (初期値は初期ベイズ型推定量  $\tilde{\alpha}^{(1)}$ ,  $\tilde{\beta}^{(2)}$ ).

$\epsilon$	$n$	$\tilde{\alpha}_1$	$\tilde{\alpha}_2$	$\tilde{\alpha}_3$	$\tilde{\beta}_1$	$\tilde{\beta}_2$
		3.0	7.0	5.0	0.5	5.0
0.1	100	3.0989 (1.27256)	7.0785 (1.15228)	5.3928 (3.00612)	0.6157 (0.27360)	4.9194 (0.66030)
	1000	3.1639 (1.30059)	7.2916 (1.18150)	5.5051 (2.99580)	0.5080 (0.06659)	4.9822 (0.18311)
0.05	100	2.9628 (0.45765)	6.8543 (0.49362)	4.9617 (1.10814)	0.5935 (0.23745)	4.8885 (0.52359)
	1000	3.0068 (0.45617)	7.0332 (0.49930)	5.0506 (1.05550)	0.5066 (0.06494)	4.9821 (0.17108)
0.01	100	2.9535 (0.12169)	6.8106 (0.13577)	4.9175 (0.47933)	0.5515 (0.22425)	4.8856 (0.81001)
	1000	2.9862 (0.14533)	6.9729 (0.17245)	5.0241 (0.55603)	0.5047 (0.07110)	4.9871 (0.18999)

づいており、表 12 のハイブリッド推定量  $\tilde{\alpha}_3$  の標準偏差は、 $r_1 = 0.2$  または  $0.3$  のとき、表 7 の値と非常に近い値を取っている。これは表 11 において  $r_1$  を調整することによって得られる初期ベイズ型推定量が良いふるまいをすること、表 12 では  $r_1 = 0.2$  または  $0.3$ ,  $r_2 = 1$  の場合にハイブリッド推定量が、真値を初期値として求められた適応的最尤型推定量(表 5)と同程度によいことが分かる。

## 5. おわりに

本論文では、確率微分方程式モデルの未知パラメータに対して、高頻度データを用いたハイブリッド推定法について解説した。確率微分方程式(SDE)モデルの統計解析および数値シミュレーションの統計パッケージ Yuima を開発するための Yuima プロジェクト(Brouste et al., 2014)が立ち上がって 10 年以上の歳月が経っている。著者はほとんど貢献できていないが、実際に計算機で SDE の統計解析を実行しようとするとき、SDE モデル特有の問題点も多々あるが、高次元パ

表 11. 初期ベイズ型推定量  $\tilde{\alpha}^{(1)}, \tilde{\beta}^{(2)}$  ( $r_2 = 1$ ).

$r_1$	$\tilde{\alpha}_1^{(1)}$	$\tilde{\alpha}_2^{(1)}$	$\tilde{\alpha}_3^{(1)}$	$\tilde{\beta}_1^{(2)}$	$\tilde{\beta}_2^{(2)}$
	3.0	7.0	5.0	0.5	5.0
0.1	2.9386 (0.38420)	6.7986 (0.40359)	5.7185 (0.41996)	0.4730 (0.06666)	4.9692 (0.17111)
0.2	2.9787 (0.41936)	6.9292 (0.45566)	5.0128 (0.32924)	0.5051 (0.06572)	4.9913 (0.17195)
0.3	3.0141 (0.43359)	7.0188 (0.48016)	4.9092 (0.28671)	0.5075 (0.06498)	4.9934 (0.17171)
0.4	3.0181 (0.44859)	7.0421 (0.50395)	4.9585 (0.51720)	0.5089 (0.06491)	4.9948 (0.17162)
0.5	3.0107 (0.46482)	7.0396 (0.51930)	5.0079 (0.88014)	0.5094 (0.06491)	4.9957 (0.17151)
0.6	3.0049 (0.47892)	7.0365 (0.53252)	5.0423 (1.00453)	0.5096 (0.06507)	4.9960 (0.17140)
0.7	3.0026 (0.47721)	7.0349 (0.53111)	5.0508 (1.08994)	0.5098 (0.06512)	4.9962 (0.17148)
0.8	3.0020 (0.48074)	7.0341 (0.53613)	5.0581 (1.15824)	0.5097 (0.06507)	4.9961 (0.17145)
0.9	3.0064 (0.46961)	7.0394 (0.52317)	5.0264 (0.92606)	0.5101 (0.06500)	4.9964 (0.17166)
1	3.0052 (0.47404)	7.0380 (0.52699)	5.0437 (1.06207)	0.5100 (0.06509)	4.9965 (0.17177)

表 12. ハイブリッド推定量  $\check{\theta}$  ( $r_2 = 1$ , 初期値は初期ベイズ型推定量  $\tilde{\alpha}^{(1)}, \tilde{\beta}^{(2)}$ ).

$r_1$	$\check{\alpha}_1$	$\check{\alpha}_2$	$\check{\alpha}_3$	$\check{\beta}_1$	$\check{\beta}_2$
	3.0	7.0	5.0	0.5	5.0
0.1	3.0146 (0.43261)	7.0397 (0.48466)	4.9777 (0.31640)	0.5067 (0.06482)	4.9815 (0.17108)
0.2	3.0202 (0.42416)	7.0452 (0.47805)	4.9812 (0.19371)	0.5068 (0.06472)	4.9817 (0.17093)
0.3	3.0212 (0.42378)	7.0464 (0.47754)	4.9806 (0.19390)	0.5068 (0.06472)	4.9817 (0.17093)
0.4	3.0165 (0.43269)	7.0426 (0.48206)	4.9895 (0.49660)	0.5068 (0.06471)	4.9817 (0.17093)
0.5	3.0088 (0.45058)	7.0354 (0.49496)	5.0230 (0.88463)	0.5066 (0.06484)	4.9818 (0.17091)
0.6	3.0039 (0.46056)	7.0312 (0.50223)	5.0501 (0.99592)	0.5066 (0.06490)	4.9820 (0.17088)
0.7	3.0033 (0.45931)	7.0303 (0.50169)	5.0590 (1.09509)	0.5065 (0.06501)	4.9820 (0.17084)
0.8	3.0039 (0.46011)	7.0302 (0.50334)	5.0651 (1.15122)	0.5065 (0.06491)	4.9821 (0.17110)
0.9	3.0074 (0.45249)	7.0340 (0.49633)	5.0337 (0.92607)	0.5067 (0.06485)	4.9820 (0.17090)
1	3.0068 (0.45617)	7.0332 (0.49930)	5.0506 (1.05550)	0.5066 (0.06494)	4.9821 (0.17108)

ラメータ空間における疑似尤度関数の最適化やベイズ型推定量の MCMC 法による統計計算など普遍的な問題が浮かび上がる。エルゴード的拡散過程モデルのパラメータ推定における顕著な性質は、ドリフトパラメータとボラティリティパラメータの推定量の収束率が異なる点である。この性質を用いて効率よく推定量の計算を実行したいというのが、ハイブリッド推定の最初の動機付けである。これは Yuima への実装という具体的な問題から生まれたものである。確率微分方程式モデルの統計解析については、Kutoyants (1984, 1994, 2004, 2015), Prakasa Rao (1999), Iacus (2008), Sørensen (2012), 吉田 (2003, 2010, 2011), 林・吉田 (2008), 内田 (2008a, 2008b, 2009, 2013), 増田 (2015) などを参照。SDE モデルの最尤型推定量やベイズ推定量の理論的性質に基づいて、これら推定量を効率よく計算する方法の開発が今後益々重要視されると考えられる。

## 謝 辞

査読者から有益なコメントを頂いた。ここに記して感謝の意を表したい。本研究は JSPS 科研費 24300107 および CREST, JST の助成を受けたものである。

## 参 考 文 献

- Adams, R. A. and Fournier, J. J. F. (2003). *Sobolev Spaces*, 2nd ed., Pure and Applied Mathematics, 140, Elsevier/Academic Press, Amsterdam.
- Azencott, R. (1982). Formule de Taylor stochastique et développement asymptotique d'intégrales de Feynmann, *Séminaire de Probabilités XVI; Supplément: Géométrie Différentielle Stochastique*, Lecture Notes in Mathematics, **921**, 237–285, Springer Verlag, Berlin.
- Bibby, B. M. and Sørensen, M. (1995). Martingale estimating functions for discretely observed diffusion processes, *Bernoulli*, **1**, 17–39.
- Brouste, A., Fukasawa, M., Hino, H., Iacus, S., Kamatani, K., Koike, Y., Masuda, H., Nomura, R., Shimizu, Y., Uchida, M. and Yoshida, N. (2014). The YUIMA Project: A computational framework for simulation and inference of stochastic differential equations, *Journal of Statistical Software*, **57**(4), 1–51.
- Dohnal, G. (1987). On estimating the diffusion coefficient, *Journal of Applied Probability*, **24**, 105–114.
- Florens-Zmirou, D. (1989). Approximate discrete time schemes for statistics of diffusion processes, *Statistics*, **20**, 547–557.
- Freidlin, M. I. and Wentzell, A. D. (1998). *Random Perturbations of Dynamical Systems*, 2nd ed., Springer-Verlag, New York.
- Fuchs, C. (2013). *Inference for Diffusion Processes: With Applications in Life Sciences*, Springer, Berlin.
- Fujii, T. and Uchida, M. (2014). AIC type statistics for discretely observed ergodic diffusion processes, *Statistical Inference for Stochastic Processes*, **17**, 267–282.
- Genon-Catalot, V. (1990). Maximum contrast estimation for diffusion processes from discrete observations, *Statistics*, **21**, 99–116.
- Genon-Catalot, V. and Jacod, J. (1993). On the estimation of the diffusion coefficient for multidimensional diffusion processes, *Annales de l'Institut Henri Poincaré (B) Probabilités et Statistiques*, **29**, 119–151.
- Genon-Catalot, V. and Jacod, J. (1994). Estimation of the diffusion coefficient for diffusion processes: Random sampling, *Scandinavian Journal of Statistics*, **21**, 193–221.
- Gloter, A. and Sørensen, M. (2009). Estimation for stochastic differential equations with a small diffu-

- sion coefficient, *Stochastic Processes and Their Applications*, **119**, 679–699.
- Gobet, E. (2001). Local asymptotic mixed normality property for elliptic diffusion: A Malliavin calculus approach, *Bernoulli*, **7**, 899–912.
- Gobet, E. (2002). LAN property for ergodic diffusions with discrete observations, *Annales de l'Institut Henri Poincaré Probabilités et Statistiques*, **38**, 711–737.
- Guy, R., Laredo, C. and Vergu, E. (2014). Parametric inference for discretely observed multidimensional diffusions with small diffusion coefficient, *Stochastic Processes and Their Applications*, **124**, 51–80.
- 林高樹, 吉田朋広 (2008). 高頻度金融データと統計科学, 『21 世紀の統計科学 I: 社会・経済の統計科学』, 第 10 章, 東京大学出版会, 東京.
- Iacus, S. (2000). Semiparametric estimation of the state of a dynamical system with small noise, *Statistical Inference for Stochastic Processes*, **3**, 277–288.
- Iacus, S. M. (2008). *Simulation and Inference for Stochastic Differential Equations: With R Examples*, Springer, New York.
- Iacus, S. and Kutoyants Yu. A. (2001). Semiparametric hypotheses testing for dynamical systems with small noise, *Mathematical Methods of Statistics*, **10**, 105–120.
- Ibragimov, I. A. and Has'minskii, R. Z. (1981). *Statistical Estimation*, Springer Verlag, New York.
- Jacod, J. and Shiryaev, A. N. (2003). *Limit Theorems for Stochastic Processes*, 2nd ed., Springer-Verlag, New York.
- Kamatani, K. (2014). Efficient strategy for the Markov chain Monte Carlo in high-dimension with heavy-tailed target probability distribution, arXiv:1412.6231.
- Kamatani, K. and Uchida, M. (2015). Hybrid multi-step estimators for ergodic diffusion processes from discrete observations, *Statistical Inference for Stochastic Processes*, **18**, 177–204.
- Kamatani, K., Nogita, A. and Uchida, M. (2016). Hybrid multi-step estimation of the volatility for stochastic regression models, *Bulletin of Informatics and Cybernetics*, **48**, 19–35.
- Kessler, M. (1995). Estimation des paramètres d'une diffusion par des contrastes corrigés, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Series I, Mathematics*, **320**, 359–362.
- Kessler, M. (1997). Estimation of an ergodic diffusion from discrete observations, *Scandinavian Journal of Statistics*, **24**, 211–229.
- Kunitomo, N. and Takahashi, A. (2001). The asymptotic expansion approach to the valuation of interest rate contingent claims, *Mathematical Finance*, **11**, 117–151.
- Kutoyants, Yu. A. (1984). Parameter estimation for stochastic processes (ed. B.L.S. Prakasa Rao), Heldermann, Berlin.
- Kutoyants, Yu. A. (1994). *Identification of Dynamical Systems with Small Noise*, Kluwer, Dordrecht.
- Kutoyants, Yu. A. (2004). *Statistical Inference for Ergodic Diffusion Processes*, Springer-Verlag, London.
- Kutoyants Yu. A. (2015). On multi-step MLE-process for ergodic diffusion, arXiv 1504.01869, Preprint.
- Laredo, C. F. (1990). A sufficient condition for asymptotic sufficiency of incomplete observations of a diffusion process, *The Annals of Statistics*, **18**, 1158–1171.
- Lehmann, E. L. (1999). *Elements of Large-Sample Theory*, Springer-Verlag, New York.
- Masuda, H. (2013a). Asymptotics for functionals of self-normalized residuals of discretely observed stochastic processes, *Stochastic Processes and Their Applications*, **123**, 2752–2778.
- Masuda, H. (2013b). Convergence of Gaussian quasi-likelihood random fields for ergodic Levy driven SDE observed at high frequency, *The Annals of Statistics*, **41**, 1593–1641.
- 増田弘毅 (2015). 非正規ノイズ型エルゴード過程の推定, 日本統計学会誌, **44**(2), 471–495.
- Nomura, R. and Uchida, M. (2016a). Adaptive maximum likelihood type estimation for small diffusion processes from discrete observations, Preprint, <http://www.sigmath.es.osaka-u.ac.jp/~uchida/>

Paper/AdaML\_small.pdf.

- Nomura, R. and Uchida, M. (2016b). Adaptive Bayes estimators and hybrid estimators for small diffusion processes based on sampled data, *Journal of the Japan Statistical Society*, **46**, 129–154.
- Ogihara, T. and Yoshida, N. (2011). Quasi-likelihood analysis for the stochastic differential equation with jumps, *Statistical Inference for Stochastic Processes*, **14**, 189–229.
- Prakasa Rao, B. L. S. (1983). Asymptotic theory for nonlinear least squares estimator for diffusion processes, *Mathematische Operationsforschung und Statistik, Series Optimization*, **14**, 195–209.
- Prakasa Rao, B. L. S. (1988). Statistical Inference from Sampled Data for Stochastic Processes, *Contemporary Mathematics*, **80**, 249–284, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island.
- Prakasa Rao, B. L. S. (1999). *Statistical Inference for Diffusion Type Processes*, Edward Arnold, London.
- R Development Core Team (2013). R: A language and environment for statistical computing, *R Foundation for Statistical Computing*, Vienna, Austria, <http://www.R-project.org/>.
- Robert, C. P. and Casella, G. (2004). *Monte Carlo Statistical Methods*, 3rd ed., Springer Verlag, New York.
- Shimizu, Y. (2006). M-estimation for discretely observed ergodic diffusion processes with infinitely many jumps, *Statistical Inference for Stochastic Processes*, **9**, 179–225.
- Shimizu, Y. and Yoshida, N. (2006). Estimation of parameters for diffusion processes with jumps from discrete observations, *Statistical Inference for Stochastic Processes*, **9**, 227–277.
- Sørensen, M. (2000). Small dispersion asymptotics for diffusion martingale estimating functions, Preprint No. 2000-2, Department of Statistics and Operations Research, University of Copenhagen, <http://www.math.ku.dk/~michael/smallld.pdf>.
- Sørensen, M. (2012). Estimating functions for diffusion-type processes, *Statistical Methods for Stochastic Differential Equations* (eds. M. Kessler, A. Lindner and M. Sørensen), 1–107, CRC Press, Chapman and Hall, Boca Raton.
- Sørensen, M. and Uchida, M. (2003). Small diffusion asymptotics for discretely sampled stochastic differential equations, *Bernoulli*, **9**, 1051–1069.
- Takahashi, A. and Yoshida, N. (2004). An asymptotic expansion scheme for optimal investment problems, *Statistical Inference for Stochastic Processes*, **7**, 153–188.
- Uchida, M. (2003). Estimation for dynamical systems with small noise from discrete observations, *Journal of the Japan Statistical Society*, **33**, 157–167.
- Uchida, M. (2004). Estimation for discretely observed small diffusions based on approximate martingale estimating functions, *Scandinavian Journal of Statistics*, **31**, 553–566.
- Uchida, M. (2006). Martingale estimating functions based on eigenfunctions for discretely observed small diffusions, *Bulletin of Informatics and Cybernetics*, **38**, 1–13.
- Uchida, M. (2008). Approximate martingale estimating functions for stochastic differential equations with small noises, *Stochastic Processes and Their Applications*, **118**, 1706–1721.
- 内田雅之 (2008a). 確率微分方程式の母数推定, 『21 世紀の統計科学 III : 数理・計算の統計科学』, 第 7 章, 東京大学出版会, 東京.
- 内田雅之 (2008b). 離散観測に基づく拡散過程の統計的推測, *数学*, **60**(4), 368–379.
- 内田雅之 (2009). 小さな拡散過程のドリフトパラメータの推定, *統計数理*, **57**(1), 67–81.
- Uchida, M. (2010). Contrast-based information criterion for ergodic diffusion processes from discrete observations, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **62**, 161–187.
- 内田雅之 (2013). 確率微分方程式の統計的モデリング, *日本統計学会誌*, **43**(2), 335–358.
- Uchida, M. and Yoshida, N. (2001). Information criteria in model selection for mixing processes, *Statistical Inference for Stochastic Processes*, **4**, 73–98.
- Uchida, M. and Yoshida, N. (2004a). Information criteria for small diffusions via the theory of Malliavin-

- Watanabe, *Statistical Inference for Stochastic Processes*, **7**, 35–67.
- Uchida, M. and Yoshida, N. (2004b). Asymptotic expansion for small diffusions applied to option pricing, *Statistical Inference for Stochastic Processes*, **7**, 189–223.
- Uchida, M. and Yoshida, N. (2006). Asymptotic expansion and information criteria. Dedicated to Professor Minoru Siotani on his 80th birthday, *SUT Journal of Mathematics*, **42**, 31–58.
- Uchida, M. and Yoshida, N. (2011). Estimation for misspecified ergodic diffusion processes from discrete observations, *European Series in Applied and Industrial Mathematics: Probability and Statistics*, **15**, 270–290.
- Uchida, M. and Yoshida, N. (2012). Adaptive estimation of an ergodic diffusion process based on sampled data, *Stochastic Processes and Their Applications*, **122**, 2885–2924.
- Uchida, M. and Yoshida, N. (2013). Quasi likelihood analysis of volatility and nondegeneracy of statistical random field, *Stochastic Processes and Their Applications*, **123**, 2851–2876.
- Uchida, M. and Yoshida, N. (2014). Adaptive Bayes type estimators of ergodic diffusion processes from discrete observations, *Statistical Inference for Stochastic Processes*, **17**, 181–219.
- Uchida, M. and Yoshida, N. (2016). Model selection for volatility prediction, *The Fascination of Probability, Statistics and Their Applications*, In Honour of Ole, E. Barndorff-Nielsen (eds. Mark Podolskij, Robert Stelzer, Steen Thorbjørnsen and Almut E. D. Veraart), 343–360, Springer, Switzerland.
- Yoshida, N. (1992a). Asymptotic expansion of maximum likelihood estimators for small diffusions via the theory of Malliavin-Watanabe, *Probability Theory and Related Fields*, **92**, 275–311.
- Yoshida, N. (1992b). Asymptotic expansion for statistics related to small diffusions, *Journal of the Japan Statistical Society*, **22**, 139–159.
- Yoshida, N. (1992c). Estimation for diffusion processes from discrete observation, *Journal of Multivariate Analysis*, **41**, 220–242.
- Yoshida, N. (1993). Asymptotic expansion of Bayes estimators for small diffusions, *Probability Theory and Related Fields*, **95**, 429–450.
- Yoshida, N. (2003). Conditional expansions and their applications, *Stochastic Processes and Their Applications*, **107**, 53–81.
- 吉田朋広 (2003). Malliavin 解析と数理統計, 数学, **55**, 225–244.
- 吉田朋広 (2010). 確率過程の統計学：概観と展望, 日本統計学会誌, **40**(1), 47–60.
- Yoshida, N. (2011). Polynomial type large deviation inequalities and quasi-likelihood analysis for stochastic differential equations, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **63**, 431–479.
- 吉田朋広 (2011). 拡散型確率過程の推定における極限定理, 統計数理, **59**(1), 125–140.

# Hybrid Estimation for Stochastic Differential Equations Based on High-frequency Data

Masayuki Uchida<sup>1,2,3</sup>

<sup>1</sup>Graduate School of Engineering Science, Osaka University

<sup>2</sup>MMDS, Osaka University

<sup>3</sup>CREST

In this paper, we survey previous researches on hybrid estimation for unknown parameters of stochastic differential equations based on high-frequency data. Using a Bayes type estimator with a non-optimal rate of convergence as the initial estimator, we obtain a multi-step estimator and an adaptive maximum likelihood type estimator, and show their asymptotic properties. For three kinds of diffusion models, ergodic diffusions, non-ergodic diffusions and small diffusions, we give some examples and simulation results.